

COLUMNAS LIQUIDAS EN
CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

1976

Informe final

Madrid, Diciembre 1976

COLUMNAS LIQUIDAS EN
CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

Convenio de Investigación entre la Comisión Nacional de Investigación del Espacio (CONIE) y la Universidad Politécnica de Madrid, desarrollado por el LABORATORIO DE AERODINAMICA Y MECANICA DE FLUIDOS de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA) durante el año 1976.

Expediente nº 253.19.1

Responsable del trabajo: I. Da-Riva de la Cavada
Colaboradores: I. Martínez Herranz
J. Peláez Alvarez

vº Bº

Director de la Investigación

-Ignacio Da-Riva de la Cavada-

Agradecemos la colaboración prestada por el Dr. Domingo Rodríguez Manzano en la preparación de los programas de cálculo numérico utilizados en este trabajo, así como a Jesús Sánchez Vállez y Santiago Sanz de la Oliva por la mecanografía y a Juan Valero Medina por la delineación.

COLUMNAS LIQUIDAS EN CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

CONTENIDO

	Página
<u>Capítulo 1.- ZONAS LIQUIDAS FLOTANTES</u>	01
1.1. INTRODUCCION	02
1.2. OBTENCION DE ZONAS LIQUIDAS FLOTANTES	03
-Baño isométrico	
-Suspensión electromagnética	
-Ingravidez	
1.3. APLICACIONES DE LA ZONA FLOTANTE	06
1.3.1. Crecimiento cristalino	06
1.3.2. Electroforesis	07
1.4. EL ESTUDIO DE LAS ZONAS FLOTANTES	11
1.5. PERSPECTIVAS FUTURAS	13
 <u>Capítulo 2.- MEMORIA</u>	 15
2.1. EL DESARROLLO DEL TRABAJO	16
2.2. METODO	17
2.3. PREVISIONES	18
 <u>Capítulo 3.- ESTUDIO DE LAS FIGURAS AXILSIMETRICAS DE EQUI-</u> LIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE EN INGRA- VIDEZ CON Y SIN ROTACION GLOBAL	 20
- Lista de símbolos	21
3.1. HIPOTESIS	23
3.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO	24
-Método de la curvatura	
-Método variacional	
3.3. RESOLUCION	27
 <u>Apéndice.- ESTUDIO DETALLADO DE LAS FORMAS AXILSIMETRI-</u> CAS DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLO- TANTE EN REPOSO	 30

	Página
A-3.1. INTRODUCCION	31
A-3.2. PLANO DE LAS FASES DE LA ECUACION DE EQUI- LIBRIO	34
A-3.3. RESOLUCION	36
 <u>Capítulo 4.-</u> ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD AXILSIMETRICA Y NO AXILSIMETRICA DE LAS FORMAS CILINDRICAS DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE SIN ROTACION Y CON ROTACION GLOBAL	 42
- Lista de símbolos	43
4.1. ZONAS CILINDRICAS	45
4.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO	47
4.3. RESOLUCION	49
4.4. ANALISIS DEL RESULTADO	50
4.4.1. Caso de zona con los bordes anclados ..	51
4.4.2. Caso de zona con los bordes libres	52
4.4.3. Caso mixto de zona con un borde anclado y el otro libre	53
 <u>Apéndice.-</u> ESTUDIO DETALLADO DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA CILINDRICA CON UN BORDE ANCLADO Y EL OTRO LIBRE	 55
 <u>Capítulo 5.-</u> PEQUEÑAS OSCILACIONES DEL VOLUMEN DE LIQUI- DO EN LA ZONA	 60
- Lista de símbolos	61
5.1. INTRODUCCION	63
5.2. PLANTEAMIENTO	64
5.3. RESOLUCION	67
5.3.1. Zona cilíndrica	68
-Zona con bordes anclados	
-Zona con bordes libres	
-Zona con un borde anclado y el otro libre	
5.4. RESULTADOS	71
5.5. CONCLUSIONES	71

Capítulo 6.- VIBRACION AXIAL DE UNA ZONA FLOTANTE CILINDRICA 74

 - Lista de símbolos 75

 6.1. INTRODUCCION 77

 6.2. PLANTEAMIENTO 77

 6.3. RESOLUCION 80

 6.4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS 82

BIBLIOGRAFIA 84

CAPITULO 1

ZONAS LIQUIDAS FLOTANTES

Indice

- 1.1. INTRODUCCION
- 1.2. OBTENCION DE ZONAS LIQUIDAS FLOTANTES
 - Baño isométrico
 - Suspensión electromagnética
 - Ingravidez
- 1.3. APLICACIONES DE LA ZONA FLOTANTE
 - 1.3.1. Crecimiento cristalino
 - 1.3.2. Electroforesis
- 1.4. EL ESTUDIO DE LAS ZONAS FLOTANTES
- 1.5. PERSPECTIVAS FUTURAS

1. ZONAS LIQUIDAS FLOTANTES

1.1. INTRODUCCION

Bajo el apelativo de columnas líquidas en ingravidez, o mejor "zonas líquidas flotantes", se entiende un volumen de líquido comprendido entre dos placas, en ausencia de fuerzas másicas de gravitación (flotando).

Las fuerzas que gobiernan estas configuraciones suelen ser de superficie (ejercidas en el contorno del volumen líquido): tensión superficial, adherencia a las placas, y las perturbaciones que actúan sobre el contorno (vibraciones, giros, presencia de la zona en una atmósfera en movimiento, etc.), aunque también puede haber perturbaciones que den lugar a fuerzas másicas: inerciales, electromagnéticas, gravitatorias, etc..

Uno de los fines a conseguir en este campo es la puesta a punto de la técnica de zonas flotantes para su utilización en laboratorios espaciales de aplicación.

El análisis teórico en curso llegaría a cumplir los siguientes objetivos:

1º. Análisis de la geometría de las zonas flotantes en equilibrio, su estabilidad y estructura hidrodinámica.

2º. Predicción de tolerancias admisibles en el diseño de equipos que utilicen la zona flotante.

1.2. OBTENCION DE ZONAS LIQUIDAS FLOTANTES

Para la obtención de zonas flotantes han sido utilizados los siguientes procedimientos, citados en orden cronológico:

Baño isométrico (flotabilidad neutra) [30], utilizando un baño líquido de densidad igual al de la zona, dentro del cual se hacía la experimentación. Este procedimiento, pese a ser el de más fácil realización, el más usado, y sin duda alguna el más bello, adolece de serios inconvenientes:

- No se consigue con él la anulación de las fuerzas másicas, sino que sólo se logra que no influyan en el equilibrio local en la superficie libre, como se puede apreciar en la Fig. 1.1.

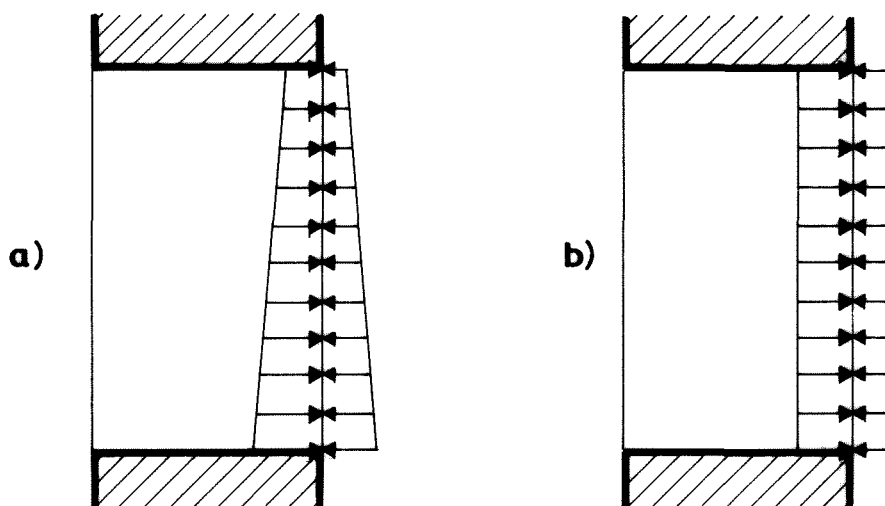


Fig. 1.1. Perfiles de presión: a) en la superficie de una zona cilíndrica flotando en baño isométrico; b) caso ideal (sin fuerzas másicas).

- Se falsea una de las dos fuerzas que gobiernan la

forma de equilibrio y la estabilidad de la zona flotante, ya que la tensión superficial (o energía superficial), es función de ambos medios contiguos, y además, el ángulo de contacto de un líquido con un sólido depende del tercer medio que forma con los dos anteriores la línea de contacto triple (ver Fig. 1.2).

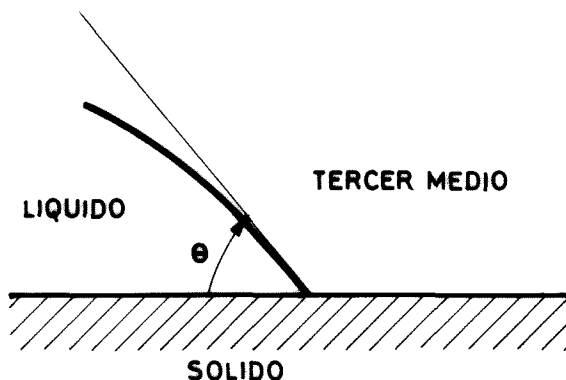


Fig. 1.2. Ángulo de contacto de un líquido con un sólido.

- Al ser la densidad del medio que rodea la zona comparable a la de ésta (igual), quedan enmascarados los procesos dinámicos, y en especial la estabilidad.
- La gran densidad del medio circundante altera el equilibrio local con fuerzas másicas (invalida, por ejemplo, el análisis de la zona en rotación).
- La viscosidad del baño influye en el equilibrio hidrodinámico en la superficie.
- La zona se contamina (sobre todo su superficie), debido a la difusión.

-El acceso a la zona es complicado.

Suspensión electromagnética [34], manteniendo el líquido de la zona en un campo electromagnético que contrarreste directamente las fuerzas másicas de gravitación. La escasa efectividad del sistema y la tremenda restricción que impone en cuanto a líquidos candidatos (en general, metales fundidos), unido a su excesivo control de la hidrodinámica de la zona, parecen haber descartado este procedimiento.

Ingravidez, es decir, cancelación de las fuerzas másicas gravitatorias con las de inercia de un movimiento acelerado, que puede ser:

- a) Caída libre en torre de vacío (condiciones de ingravidez durante algunos segundos).
- b) Caída libre de proyectiles elevados a la estratosfera (hasta 40 km.) mediante globo. Por la baja densidad del aire a esas cotas, se llegan a conseguir decenas de segundos de ingravidez.
- c) Vuelo parabólico. Condiciones de ingravidez durante algunos minutos sin imperativos de carga útil y con inmejorables posibilidades de filmación y manipulación.
- d) Cohetes de sondeo. Condiciones de ingravidez hasta unos 15 minutos [21].
- e) Vuelo orbital. Ningún inconveniente [28].

Los ensayos con zonas flotantes requieren extremo cuidado y un cierto tiempo, por lo que solamente resultan aptos los tres últimos procedimientos anteriormente citados, y en especial el vuelo orbital, donde se hicieron las primeras pruebas a bordo del Skylab IV. La Agencia Espacial Europea (ESA) tiene en proyecto la puesta en el laboratorio espacial Spacelab de un módulo de ensayos físicos con fluidos (FPM), para la experimentación metódica y rigurosa con zonas líquidas flotantes.

Para situar la zona líquida entre las dos placas puede utilizarse cualquier procedimiento, desde la inyección axial a través de una de las placas, a la simple deposición directa desde una pipeta, pasando por el método artesanal de conducir una gota flotante hasta las placas, con ayuda, por ejemplo, de una varilla.

1.3. APLICACIONES DE LA ZONA FLOTANTE

Aparte del indudable valor científico que representa el conocimiento de este nuevo campo de la mecánica de fluidos, y que de por sí justificaría su estudio y experimentación, existen numerosas aplicaciones prácticas de las zonas flotantes en la tecnología espacial, entre las que se destacan: el crecimiento cristalino y la electroforesis.

1.3.1. Crecimiento cristalino

En la obtención, refinado, manejo y utilización de metales se hace uso de la cristalización a partir del metal fundi-

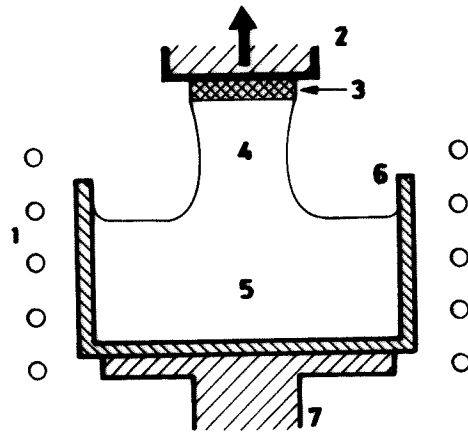
do. Así se viene haciendo desde la Edad de los Metales, con ayuda de un crisol y una fuente térmica. Estudios llevados a cabo en estas últimas décadas demuestran que con los procedimientos usuales no llegamos a obtener más que la décima parte de las posibilidades en características, por culpa de las imperfecciones cristalinas. Entre las causas más importantes de esta merma están: impurezas presentes, contaminación por el crisol y la atmósfera, corrientes internas de convección libre, etc..

Con la llegada en los años 40 de la utilización masiva de materiales semiconductores, se hizo imprescindible una mejora en la estructura cristalográfica disponible, desarrollándose nuevos métodos de crecimiento, de entre los que cabe destacar el de la columna líquida de Czochralski (en los años 50), y el de la zona líquida (en los 60). En la Fig. 1.3 se representan esquemas de ambos procedimientos en comparación con una zona flotante.

Sobre la importancia de la obtención de cristales perfectos de aplicación electrónica, no hay que insistir: memorias de computadoras, microondas, optoelectrónica, detectores piezoeléctricos, ultrasónicos, etc., etc.; todo ello requiere cristales perfectos de Si y Ge, así como de materiales compuestos (semiconductores, ferromagnéticos, optoelectrónicos, piezoeléctricos, etc.) de una gran perfección [06].

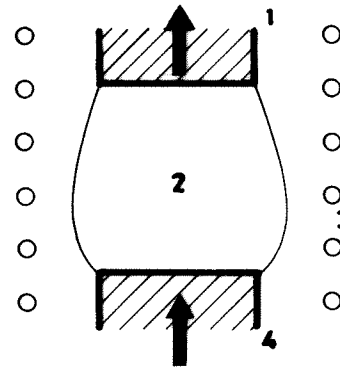
1.3.2. Electroforesis

La electroforesis es un procedimiento de separación de



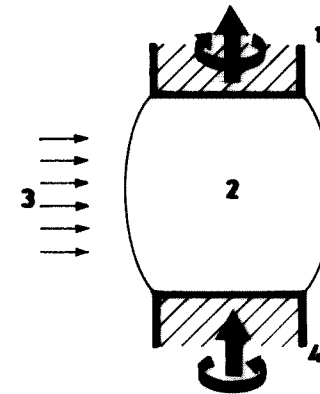
Método de Czochralski

- 1 - Calentador
- 2 - Varilla de estirado
- 3 - Cristal puro inicial
- 4 - Cristal formado
- 5 - Fundido
- 6 - Crisol
- 7 - Soporte



Zona líquida (con gravedad)

- 1 - Varilla receptora
- 2 - Zona fundida
- 3 - Bobina de alta frecuencia
- 4 - Varilla suministradora

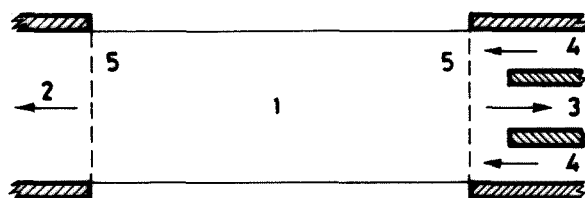


Zona flotante (sin gravedad)

- 1 - Varilla receptora
- 2 - Zona fundida
- 3 - Radiación laser
- 4 - Varilla suministradora

Fig. 1.3. Métodos de crecimiento cristalino sin crisol.

elementos en un compuesto, basado en el transporte neto de carga eléctrica por una partícula o ión, suspendido en un medio y en presencia de un campo eléctrico. Dependiendo de la carga de la partícula y de su tamaño, aparecen diferentes velocidades de difusión, que fraccionan la composición de la mezcla [23]. Pese a ser una técnica bien extendida en medicina (análisis proteínicos), su efectividad está disminuída a causa de la contaminación de las paredes (cohesencia, electroósmosis, dispersión, etc.), y de la segregación debida al campo gravitatorio actuando sobre partículas de masa diferente. Ambos inconvenientes citados serían evitados usando una zona flotante como por ejemplo la de la Fig. 1.4.



- 1 - Zona flotante
- 2 - Extracción de la especie pura
- 3 - Eliminación de restos
- 4 - Aporte de preparados
- 5 - Electrodo

Fig. 1.4. Electroforesis continua en zona flotante.

Existen otras aplicaciones de la zona flotante, pero todas ellas pueden agruparse en una u otra de las siguientes facilidades:

- 1^a. Mantenimiento de zonas líquidas en ausencia de fuerzas másicas.

- 2^a. Mantenimiento de zonas líquidas sin contacto con paredes.
- 3^a. Estudio de la interfase líquido-gas en condiciones favorables.
- 4^a. Estudio de las condiciones de mojado líquido-sólido-gas.
- 5^a. Estudio del movimiento de burbujas en un líquido ingrávito: ebullición en el espacio.

Una de las grandes ventajas de la zona flotante se deriva de su gran tamaño (de todos modos la estabilidad se hace más precaria al aumentar el volumen). En la tierra, la máxima longitud estable de una columna líquida es, según Heywang [15],

$$L_{\max} = 2.84 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad , \quad (1)$$

siendo σ la tensión superficial líquido-gas, ρ la densidad del líquido, y g la aceleración de la gravedad. Fácilmente se comprueba el conocido orden de valores para el agua: unos 4 ó 5 milímetros. (Se toca con un dedo una gota de agua y se va separando lentamente).

En las zonas flotantes, la longitud máxima estable puede llegar a ser

$$L_{\max} = 2\pi R \quad , \quad (2)$$

lo que, para un radio R de unos 2 cm., nos proporciona una columna de unos 12 cm. de larga.

1.4. EL ESTUDIO DE LAS ZONAS FLOTANTES

No existe un estudio concreto sobre la zona flotante, si bien se ha escrito mucho sobre problemas con ella relacionados.

Young y Laplace sentaron los fundamentos de la teoría de la tensión superficial. Los experimentos de Plateau merecen mención especial, ya que, a mediados del siglo pasado llevó a cabo el más exhaustivo análisis de las formas de equilibrio y la estabilidad de zonas líquidas en baño isométrico. A finales de siglo, Rayleigh [32], hizo un profundo estudio teórico.

Aparentemente desconectado de la zona flotante está el estudio de la hidrodinámica debida a un disco girando en el seno de un fluido (problema de Kàrmàn [17]), pero que, por las múltiples aplicaciones de las zonas flotantes giratorias, supone una gran contribución al estudio general de su comportamiento.

Con mayor prelación, se vino profundizando en el estudio de la gota flotante: Rayleigh [33] (1914), Appel [02] (1932), Chandrasekhar [10] (1965), Wang [45] (1975), etc., debido en gran parte a su posible aplicación a teorías generales de astrofísica y combustión.

La zona flotante quedó a un lado hasta que las exigencias de la tecnología electrónica requirieron el perfeccionamiento de la recristalización de semiconductores. Gillis [12] establece en 1962 el límite máximo de estabilidad en rotación para columnas líquidas flotantes de sección circular, experimentando con ba

ño isométrico; Mason [26] lo hace con película líquida. Carruthers y col. [09] hicieron el análisis de los ensayos que se llevaron a cabo a bordo del Skylab IV en 1973 (primeros ensayos con zona flotante) y, en esencia, en el 2º Symposium Europeo de Ciencias de los Materiales en el Espacio, celebrado en Frascati (Italia) del 6 al 8 de Abril de 1976, quedó marcado el estado actual de conocimientos sobre la zona flotante, en los términos siguientes: los estudios de las formas axilsimétricas de equilibrio de una zona flotante, y la estabilidad de las formas cilíndricas, están suficientemente desarrollados; los estudios de la dinámica interna de la zona requieren, en cambio, un mayor esfuerzo, pues, como muestran algunos experimentos [05], el flujo convectivo por gradiente de tensión superficial puede llegar a ser más dañino que el de convección libre en gravedad terrestre.

Para promover el estudio de la zona flotante, la Agencia Espacial Europea ha dispuesto el diseño y construcción de un Módulo de Ensayos Físicos con Fluidos (FPM) y, dado su especial interés, tiene prevista su utilización en la Primera Misión Spacelab para 1980. La empresa española CASA, con el asesoramiento científico de la Universidad Politécnica de Madrid (ETSIA Lab. Aer.), realizó el estudio de anteproyecto de dicho aparato [37].

La ESA ha hecho varios llamamientos para la presentación de Propuestas de Investigación a realizar en la Primera Misión Spacelab, resultando admitidos para la experimentación en el FPM los siguientes grupos universitarios: Erlangen (D), Bristol

(UK), Nápoles (I), y Madrid (ETSIA Lab. Aer.), y el centro privado de investigación Kodak Research Div. (UK).

1.5. PERSPECTIVAS FUTURAS

El análisis estático de la geometría de las zonas flotantes está hecho en los casos más simples. Para casos más específicos sería necesario dar un paso más en el estudio realizado; pero, considerando que el método ha sido ya trazado y que, hoy por hoy, la importancia de estas nuevas configuraciones es secundaria, a la vista del esfuerzo requerido por los estudios hidrodinámicos, parece lógico desviar el análisis hacia estos requerimientos prioritarios. Citemos, eso sí, los nuevos problemas previstos:

- Equilibrio en presencia de gravedad residual.
- Equilibrio en presencia de otros soportes (no paralelos, no circulares, etc.).
- Equilibrio en una atmósfera en movimiento.
- etc..

El análisis de la estabilidad del equilibrio de las zonas cilíndricas puede considerarse desarrollado, pero se hace imperativa la necesidad de corroborar experimentalmente la validez de los resultados obtenidos y la adecuación de las hipótesis utilizadas. El ofrecimiento de varias entidades relacionadas con el campo espacial (ERNO en Alemania Federal y CNES en Francia), de suministrar las facilidades de experimentación en ingravidez (con

cohetes de sondeo y globos, respectivamente) debería ser aprovechado al máximo, para sacar el mayor beneficio posible a la hora de la utilización del Laboratorio Espacial (Spacelab).

Para el caso general de zonas no cilíndricas, convendrá seguir el estudio de la estabilidad.

También sería deseable ampliar estos estudios para tener en cuenta fenómenos no lineales que puedan introducir efectos importantes en la estabilidad.

El estudio de la dinámica interna de la zona requiere un mayor esfuerzo: la teoría desarrollada para líquidos confinados apenas si tiene utilidad para zonas flotantes, y la teoría para fluidos ilimitados (problema de Kàrmàn y similares), basada en leyes de semejanza, tampoco tiene aplicación directa en nuestro estudio. Los esfuerzos viscosos, en un caso, y el principio de contuinidad, en el otro, desfiguran completamente las distribuciones de presión y velocidades.

En los próximos años deberá llevarse a cabo un análisis detallado y profundo de las configuraciones esperadas, aprovechando los primeros vuelos del Spacelab para verificar hipótesis y resultados, con el fin de disponer de una teoría consolidada y fiable a la hora de la utilización práctica de zonas líquidas flotantes, en las diversas aplicaciones.

CAPITULO 2

MEMORIA

Indice

- 2.1. EL DESARROLLO DEL TRABAJO
- 2.2. METODO
- 2.3. PREVISIONES

2. MEMORIA

2.1. EL DESARROLLO DEL TRABAJO

En un principio, con objeto de tomar contacto de un modo paulatino y fiable con los problemas relativos a la determinación de las formas de equilibrio y las condiciones de estabilidad de las zonas líquidas flotantes, se plantearon una serie de problemas sencillos (bidimensionales planos), cuya resolución, lejos de resultar inútil, supuso un paso decisivo en la captación de ideas, métodos de cálculo más apropiados, desarrollos, etc., lo que condujo a una mejor comprensión de las posibles formas que puede adoptar una zona líquida flotante, y que mostraron la conveniencia de sustituir el apelativo de "columnas" por el más general de "zonas".

Pronto se llegó a resultados importantes que motivaron nuestra participación en el 2º Symposium Europeo de Ciencias de los Materiales en el Espacio patrocinado por la ESA y que se celebró en Frascati (Italia) del 6 al 8 de Abril de 1976.

La asistencia a este certamen permitió un mayor y más profundo conocimiento de las investigaciones que, actualmente, se realizan en este campo. Por nuestra parte, contribuimos con un par de artículos, [11] y [25], y una modesta realización cinematográfica que, a pesar de sus deficiencias técnicas, fue gratamente acogida, lo que ha motivado su revisión, corrección y mejora (desgraciadamente, imperativos económicos y dificultades técnicas han venido retrasando su aparición hasta la fecha).

La parte más fructífera del trabajo resultó ser la posterior: el estudio de los límites de estabilidad (axilsimétricos y no axilsimétricos) de las formas cilíndricas de equilibrio de las zonas líquidas flotantes en reposo y en movimiento. Consideramos de gran importancia el despliegue de modos de rotura que se muestra al final del Capítulo 4, atendiendo sobre todo a su novedad, ya que no tenemos noticia de una tal puntualización en la literatura disponible.

En estos últimos meses se ha continuado con el estudio de los posibles procedimientos de perturbación controlada de la columna líquida que admitan un estudio matemático sencillo, el cual ha sido desarrollado para varios casos de excepcional interés.

Aparte de toda esta actividad teórica de investigación, podemos mencionar que en este Laboratorio se ha construido una plataforma giratoria de velocidad controlada, para proceder al ensayo de algunas condiciones particulares de mojado, muy útiles a la hora de plantear hipótesis en el estudio teórico.

2.2. METODO

Se ha tratado de realizar un estudio analítico y, por tanto, eminentemente teórico, planteándose los problemas a partir de ciertas hipótesis y resolviendo casos simplificados que den lugar a soluciones de fácil interpretación. En el desarrollo del análisis, sin embargo, se llegó a ecuaciones cuya solución exigió

la ayuda del cálculo numérico. Este Laboratorio dispone de un Calculador Hewlett-Packard 2100 S con 8k-palabras de 16 bits, con el que se abordaron satisfactoriamente todos estos problemas.

Sin embargo, se ha notado la falta de medios más idóneos que facilitasen, por ejemplo, la tarea de presentar gráficamente los resultados, tarea ingrata que ha ocupado largo tiempo al personal auxiliar disponible. Se han iniciado los trámites para la adquisición de una unidad de salida gráfica (plotter) acoplable al mencionado calculador.

Durante la realización de la película de dibujos animados sobre la obtención y manejo de zonas flotantes, se hizo uso masivo de los cálculos del ordenador aunque, claro está, gran parte de los dibujos de rotura de zonas hubieron de ser aventurados.

2.3. PREVISIONES

Las importantes aplicaciones que, cada vez más, van teniendo las zonas líquidas flotantes, y la contribución que su estudio aporta a tan importante área de la mecánica de fluidos como es la de fenómenos de superficie, prometen una continuidad a estos trabajos, en la que nos sería grato colaborar.

En Junio (1977) se celebrará en Tel Aviv (Israel) la XX Asamblea Plenaria del Comité Internacional de Investigación del Espacio (COSPAR) y en su Programa figura un Symposium sobre Ciencias de los Materiales en el Espacio, en el que, ciertamente, se hablará de la tecnología de la zona flotante.

A finales de 1975 la ESA decidió subvencionar el proyecto del Módulo de Ensayos Físicos con Fluidos (FPM) con vistas a su incorporación en el primer vuelo del laboratorio espacial Spacelab (1980). Los primeros estudios fueron encargados a la empresa española CASA [37], actuando este Laboratorio como asesor científico en las partes concernientes a los requisitos en instalaciones y funcionamiento. En resumen, el FPM servirá para llevar a cabo, de un modo sencillo, controlado y fiable, los siguientes cometidos:

- Formación de una zona líquida para diversas geometrías.
- Inyección y extracción de líquido (continua y oscilante).
- Variación de la longitud de la zona.
- Rotación independiente de cada disco soporte.
- Diferentes condiciones de contacto sólido-líquido-gas.
- Vibración de la zona.

y también para establecer gradientes de:

- Temperatura.
- Concentración.
- Campo eléctrico.

La realización del FPM permitirá la visualización y medición de parámetros (geométricos, mecánicos, térmicos, eléctricos, etc.) de zonas líquidas flotantes en ingravidez, proporcionando valiosos datos para confrontar con las predicciones teóricas.

CAPITULO 3

ESTUDIO DE LAS FIGURAS AXILSIMETRICAS DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA
LIQUIDA FLOTANTE EN INGRAVIDEZ CON Y SIN ROTACION GLOBAL

Indice

- Lista de símbolos
- 3.1. HIPOTESIS
- 3.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO
 - Método de la curvatura
 - Método variacional
- 3.3. RESOLUCION

LISTA DE SIMBOLOS

- A, Constante en la ecuación (11).
- L, Longitud de la zona. Lagrangiana por unidad de longitud.
- P, Presión.
- T, Energía cinética, adimensionalizada con σL^2 .
- U, Energía potencial, adimensionalizada con σL^2 .
- V, Volumen de la zona, adimensionalizado con L^3 .
- a, Radio de un disco, adimensionalizado con L.
- p, Diferencia de presiones entre el eje de la zona y la atmósfera externa, adimensionalizada en la forma:

$$p = \frac{P_0 - P_a}{\sigma} L .$$

- r, Radio de curvatura, adimensionalizado con L.
- x, Coordenada longitudinal, adimensionalizada con L.
- y, Coordenada transversal, adimensionalizada con L.
- ϕ , Función de Euler para el cálculo variacional, $\phi = L + \lambda y^2$.
- Ω , Velocidad angular.
- θ , Angulo de contacto. Angulo en el borde.
- λ , Multiplicador de Lagrange.
- ρ , Densidad del líquido.
- σ , Coeficiente de tensión superficial líquido-gas.
- ω , Parámetro de rotación:

$$\omega = \frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma} .$$

Superíndices

Las comas indican derivación respecto a la variable x .

Subíndices

a, Atmosférica.

m, Meridiano.

r, Revolución.

0, Condición en el disco $x = 0$. P_0 se refiere a la presión en el eje de la zona.

1, Condición en el disco $x = 1$.

3. ESTUDIO DE LAS FIGURAS AXILSIMETRICAS DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE EN INGRAVIDEZ CON Y SIN ROTACION GLOBAL.

3.1. HIPOTESIS.

Las hipótesis en que se basa el presente estudio son las siguientes:

1) La zona líquida está rodeada de un gas de densidad mucho menor que la del líquido. Es axilsimétrica, y puede tener un giro como sólido rígido (hidrostática) alrededor de su eje.

2) Las propiedades de la superficie de separación son uniformes.

3) Los ángulos de contacto del líquido con los discos son constantes.

4) No se tiene en cuenta efectos dinámicos.

La Fig. 3.1 muestra esquemáticamente la configuración de la zona y sus parámetros característicos.

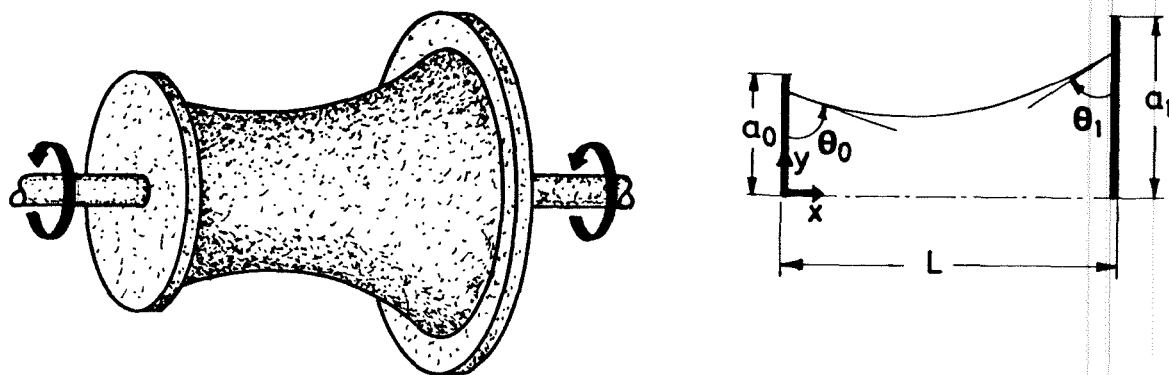


Fig. 3.1. Esquema de la zona.

3.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO.

Para el planteamiento de las condiciones de equilibrio puede seguirse cualquiera de los procedimientos siguientes:

Método de la curvatura

La ecuación diferencial que gobierna la figura de equilibrio de la zona se obtiene expresando el equilibrio local de la superficie de separación líquido-gas, esto es: que la curvatura total es proporcional al salto de presiones de uno a otro fluido.

En la Fig. 3.2 se da un esquema para el cálculo de la curvatura en una superficie de revolución.

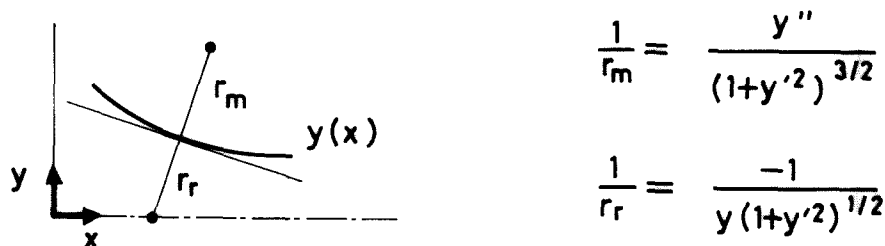


Fig. 3.2. Cálculo de la curvatura total.

La ecuación diferencial adimensional que se obtiene (ecuación de la hidrostática) es la siguiente:

$$\underbrace{\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}}}_{\text{curvatura total}} + \underbrace{\omega y^2}_{\text{efecto inercial}} + \underbrace{p}_{\text{caída de presión desde el eje a la atmósfera}} = 0 \quad (1)$$

Completan el planteamiento matemático del problema, las dos condiciones en los límites, que son:

$$\text{una de estas dos } \left\{ \begin{array}{l} y \mid x = 0 = a_0 \\ y' \mid x = 0 = -\text{ctg } \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{en una placa} \quad (2)$$

$$\text{y otra de estas dos } \left\{ \begin{array}{l} y \mid x = 1 = a_1 \\ y' \mid x = 1 = \text{ctg } \theta_1 \end{array} \right\} \quad \text{en la otra, según}$$

que el líquido llegue o no al borde del disco, en cada caso. Normalmente será $\theta_0 = \theta_1$.

Y además, que el volumen de la zona esté prefijado de antemano.

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx. \quad (3)$$

Método variacional

La simplicidad del método anterior radica en que el cálculo de la curvatura local y su expresión en un sistema de coordenadas fijo son muy sencillos. En el caso no axilsimétrico, el análisis ha de hacerse en general en coordenadas curvilíneas intrínsecas, y su tratamiento resulta inabordable.

En cambio, el método variacional nos sirve en cualquier caso, y, pese a que las dificultades que introduce la no axilsimetría no desaparecen, este método nos facilita un tratamiento general más tipificado.

Se trata, simplemente, de establecer que, como en cualquier otro problema de la mecánica clásica, el potencial cinético del sistema (su Lagrangiana) en la situación de equilibrio debe tener un mínimo, (en general, un valor extremal).

Operando siempre en variables adimensionales, tenemos:

$$\int_0^1 L \, dx = T - U \quad (4)$$

siendo

$$T = \frac{\pi}{2} \omega \int_0^1 y^4 \, dx \quad , \quad U = 2 \pi \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} \, dx \quad . \quad (5)$$

Lo que se debe cumplir es:

$$\int_0^1 L \, dx = \text{mínimo} \quad , \quad (6)$$

con la condición de que el volumen esté predeterminado:

$$V = \pi \int_0^1 y^2 \, dx \quad . \quad (7)$$

Sustituyendo (5) en (4), con la condición (7), podemos formar la función

$$\phi = L + \lambda y^2 \quad (8)$$

y, la ecuación de Euler:

$$\phi_y - \frac{d}{dx} \phi_{y'} = 0 \quad (9)$$

nos dará la ecuación diferencial de segundo grado (1), ya que λ , el multiplicador de Lagrange, tiene el significado físico de p .

3.3. RESOLUCION.

No mucho más que plantear el problema (ecuaciones (1), (2) y (3)) podemos hacer, debido a la fuerte no linealidad de la ecuación (1), por lo que se procedió a una programación numérica en computador.

En el Apéndice a este capítulo se dan algunos resultados.

Respecto al tratamiento analítico, vemos que la ecuación diferencial

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + \omega y^2 + p = 0 \quad (10)$$

carece de términos en la variable independiente, por lo que es fácil calcular una integral primera, resultando

$$\pm \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\omega}{4} y^4 + \frac{p}{2} y^2 + A = 0 \quad (11)$$

donde la constante A viene fijada por las condiciones en los lmites.

Como máximo avance analítico exacto, hemos llegado a la integral hiperelíptica

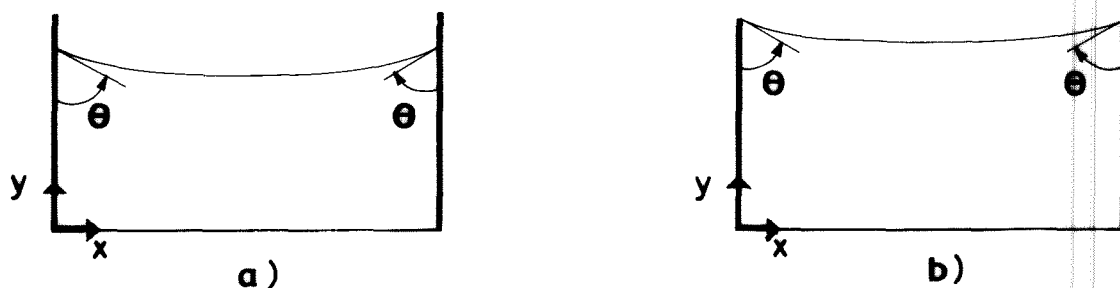
$$x = \int_{y_0}^y \frac{\frac{\omega}{4} y^4 + \frac{p}{2} y^2 + A}{\sqrt{y^2 - (\frac{\omega}{4} y^4 + \frac{p}{2} y^2 + A)^2}} dy \quad (12)$$

la cual hemos resuelto aproximadamente para formas que no difieran

mucho de un cilindro ($\frac{y - y(o)}{y(o)} \ll 1$), obteniéndose, en el caso normal de ángulos iguales en ambos discos,

$$y = y(o) - 2 x(1 - x) \operatorname{ctg} \theta, \quad (13)$$

sirviendonos para la estimación de la forma en los dos casos siguientes:



θ = ángulo de contacto

θ = ángulo en el borde

Fig. 3.3. Casos de aplicabilidad de la ecuación (13).

Para valores $\sqrt{V \cdot \operatorname{tg} \theta} < 10$, los valores obtenidos con la ecuación (13) tienen un error relativo respecto a los resultados del cálculo numérico de menos del 1%.

Es de destacar, a la vista de la ecuación (13), que la velocidad de giro de la zona no influye (en primera aproximación y para zonas casi cilíndricas), en la forma de la zona.

En el caso de que la zona no gire, mediante un cambio de escala podemos eliminar un parámetro. Si, además, suponemos que la sección meridiana de la zona tiene un máximo, y hacemos pasar por él el eje de ordenadas, podremos siempre normalizar las condiciones de contorno a los valores iniciales

$$y \Big|_{x=0} = 1 \quad (14)$$

$$y' \Big|_{x=0} = 0 \quad (15)$$

lo que reduce drásticamente el estudio analítico de los casos extremos. La condición de conservación del volumen (que ahora quedaría desacoplada), sería la que nos determinaría la relación de escala apropiada.

Para más detalles véase el Apéndice a este capítulo.

Apéndice

al

CAPITULO 3

ESTUDIO DETALLADO DE LAS FORMAS AXILSIMETRICAS DE EQUI-
LIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE EN REPOSO

Indice

- A-3.1. INTRODUCCION
- A-3.2. PLANO DE LAS FASES DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO
- A-3.3. RESOLUCION

A-3. ESTUDIO DETALLADO DE LAS FORMAS AXILSIMETRICAS DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE EN REPOSO

A-3.1. INTRODUCCION

Como se ha visto en el Capítulo 3, el planteamiento matemático en el caso $\omega=0$, se reduce a:

- Ecuación diferencial,

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + p = 0 \quad (1)$$

- Condiciones en los límites,

$$\left\{ \begin{array}{l} y|_{x=0} = a_0 \\ \text{ó} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'|_{x=0} = -\text{ctg } \theta_0 \end{array} \right. \quad (3)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} y|_{x=1} = a_1 \\ \text{ó} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'|_{x=1} = \text{ctg } \theta_1 \end{array} \right. \quad (5)$$

- Conservación del volumen

$$V = \int_0^1 y^2 dx \quad (6)$$

Con ayuda de esta última ecuación se determina el parámetro de presión, p , que aparece en la ecuación diferencial (1).

Conviene aquí hacer el cambio de escala:

$$y = py \quad p \neq 0 \quad (7)$$

$$x = px \quad p \neq 0 \quad (8)$$

que nos traslada el parámetro de la ecuación (1) a la ecuación

(6), con lo que se hace con más claridad el estudio de la ecuación diferencial. Este paso no es válido si $p=0$, pero no tiene importancia ya que se conoce la solución en este caso singular: la catenoide.

Desgraciadamente, esta formulación cartesiana no es la idónea para trabajar con curvaturas de funciones múltiples (no unívocas), ya que exige un manejo cuidadoso del cálculo numérico. Recordemos que la solución no es única; es evidente que unas mismas placas, con unas mismas condiciones en los límites y un mismo volumen, pueden dar lugar, cuando menos, a dos soluciones distintas, como se muestra en la Fig. A-3.1.

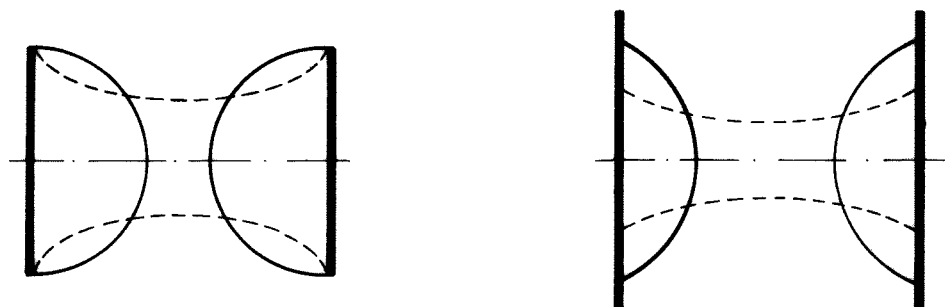


Fig. A-3.1. Ejemplo de la no unicidad de la solución de equilibrio.

Lo que se hace para soslayar esa dificultad es utilizar el método de diferenciación paramétrica con el fin de obligar a que a pequeñas variaciones de los parámetros, correspondan desviaciones asimismo pequeñas de la función (excepto, claro está, en los límites de estabilidad espacial).

Con el fin de normalizar y reducir al máximo el número

de parámetros, se introducen las hipótesis siguientes:

1) En la sección meridiana de la zona aparece un máximo relativo (vientre), en cuya sección perpendicular al eje tomaremos el origen de coordenadas. Esta hipótesis se hace simplemente para normalizar las soluciones y simplificar su estudio, obtención y dibujo, pero no es en modo alguno restrictiva, pues de la ecuación (1) particularizada en el nuevo origen de abscisas, se obtiene:

$$y''_0 - \frac{1}{y_0} + 1 = 0 \quad , \quad (9)$$

que nos indica que siempre existe ese máximo relativo, y_0 , con la condición

$$y_0 > 1 \quad . \quad (10)$$

Realmente, sería necesario demostrar, además, que toda solución tiene puntos que cumplen la condición (10), pero esto queda salvado con la hipótesis siguiente.

2) La sección meridiana de la superficie de equilibrio es parte de una curva periódica axialmente. Tal vez la demostración más sencilla sea la siguiente: comprobamos (cambiando x por $-x$) que el problema

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + 1 = 0 \quad (11)$$

$$y(0) = y_0 \quad (12)$$

$$y'(0) = 0 \quad (13)$$

es simétrico. Y esa propiedad la tiene en todos los puntos con

$y'(0)=0$, luego basta comprobar que existen al menos dos de tales puntos para que existan infinitos, separados equidistantemente, y eso es obvio, pues para una misma curvatura (en módulo), la ecuación (9) nos proporciona dos valores de y_0 , uno correspondiente a un máximo relativo, y otro a un mínimo. El período de la función $y(x)$ habrá que determinarlo para cada curva. En las figuras finales de este Apéndice se ha representado un semiperíodo para varios valores de partida y_0 .

3) Cambiamos el problema directo (dadas las condiciones reales en los límites de la zona) por el problema indirecto de su poner dadas unas condiciones iniciales ((12) y (13)) y, posterior mente, elegir para cada problema particular, el tramo adecuado de curva (y el factor de escala) que satisfacen las condiciones en los límites prescritas.

4) No se tienen en cuenta fenómenos de estabilidad. Sin embargo, es de tener en cuenta que la estabilidad está íntimamente ligada al período, y resulta útil disponer del período en función del valor de partida.

A-3.2. PLANO DE LAS FASES DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO

En realidad, la ecuación (11) debería de ser escrita en la forma bivalente:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} \pm 1 = 0 \quad , \quad (14)$$

sirviendo el signo + para el caso en que el líquido está por den

tro del elemento superficial, y el signo - para el caso en que el líquido esté por fuera.

Llamando θ al ángulo que la tangente a la curva en un punto forma con el eje, se tendrá

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta \quad (15)$$

y la ecuación (14) pasará a ser

$$-\frac{1}{y} \frac{d}{dy} (y \cos \theta) \pm 1 = 0 \quad (16)$$

que, integrada una vez, y con las condiciones (12) y (13), resulta ser:

$$\cos \theta = \pm \left(\frac{y}{2} - \frac{y_0^2}{2y} \right) + \frac{y_0}{y} \quad (17)$$

El intervalo es $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, pero podemos dibujar en $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ la parte de la curva que corresponde al signo -. Es decir, las curvas que vamos buscando tienen máximo en y_0 , y tangente vertical en y_v

$$y_v^2 = y_0^2 - 2y_0 \quad (\text{para } y_0 \geq 2) \quad (18)$$

y tienen mínimos relativos en y_m

$$y_m^2 + 2y_m = y_v^2 = y_0^2 - 2y_0 \quad (\text{para } y_0 \geq 2) \quad (19)$$

$$y_m = 2 - y_0 \quad (\text{para } y_0 \leq 2) \quad (20)$$

Para $y_0 < 2$ no existe tangente vertical.

Representaremos, pues, la función:

$$\cos \theta = \frac{y}{2} - \frac{y_0^2 - 2y_0}{2y} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (21)$$

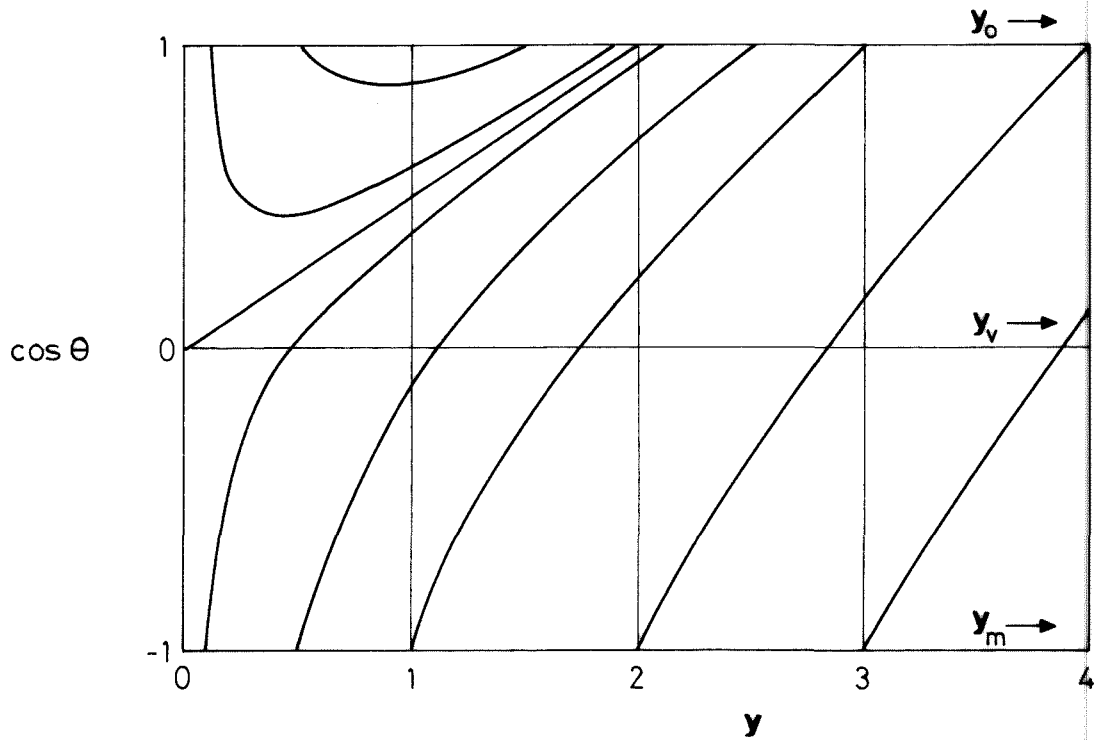


Fig. A-3.2. Plano de las fases de la ecuación diferencial (21).

Es interesante observar que cada y_0 da lugar a un y_m , pero que un mismo y_m puede ser debido a dos y_0 diferentes (si $y_m < 1$).

A-3.3. RESOLUCION

Despejando y' de la ecuación (21) teniendo en cuenta (15), obtenemos:

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{y}{2} - \frac{y_0^2 - 2y_0}{2y}\right)^2} - 1} \quad (22)$$

de donde, integrando desde el valor inicial $y(0)=y_0$ hasta un valor genérico y , tenemos:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{\pm (y_0^2 - 2y_0 y - y^2)}{\sqrt{(2y)^2 - (y^2 - y_0^2 + 2y_0 y)^2}} dy . \quad (23)$$

El signo + es aplicable hasta $y=y_v$ (si existe; véase (18)); a partir de aquí, se aplicaría el signo -.

La cuadratura (23) es elíptica y puede ponerse en función de las integrales elípticas de primera y segunda especie

$$F(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi \quad (24)$$

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} d\varphi \quad (25)$$

ya que, con el cambio

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{4(y_0 - 1)}{y_0^2} \quad (26)$$

$$\text{sen}^2 \varphi = \frac{y_0^2 - y^2}{4(y_0 - 1)} \quad (27)$$

la fórmula (23), se escribirá:

$$x = \pm \left[(2 - y_0) F(\varphi|\alpha) + y_0 E(\varphi|\alpha) \right] . \quad (28)$$

Las fórmulas (23), (22) y (21) con la condición (18), nos permiten dibujar la curva $y(x)$ para cada valor del parámetro y_0 . En la Fig. A-3.3 se encuentran dibujados los semiperíodos en ejes centrados en la sección ventral. En la Fig. A-3.4 se han vuelto a dibujar esas mismas curvas a partir de la sección nodal,

para que se observe la no unicidad de la solución si no se eligen adecuadamente las condiciones.

Por su posible utilidad en la determinación de los límites de estabilidad espacial, se incluye en la Fig. A-3.5 la curva de la variación del período de la curva $y(x)$ en función del valor máximo y_0 .

Conviene recordar por último, que se ha dejado aparte una solución, no incluida en el problema (11)-(12)-(13), a causa del cambio (7)-(8): el caso de $p=0$.

Si $p=0$, la ecuación (1) queda reducida a

$$\frac{yy''}{1+y'^2} = 1 \quad (29)$$

cuya solución, centrada en el mínimo, y_m , es:

$$y = y_m \operatorname{Ch} \frac{x}{y_m}, \quad (30)$$

es decir, una catenaria. Esta es la única solución que no tiene máximo relativo, Fig. A-3.6 y que, representada en escala y_m unitaria, hay que añadir al conjunto de la Fig. A-3.3.

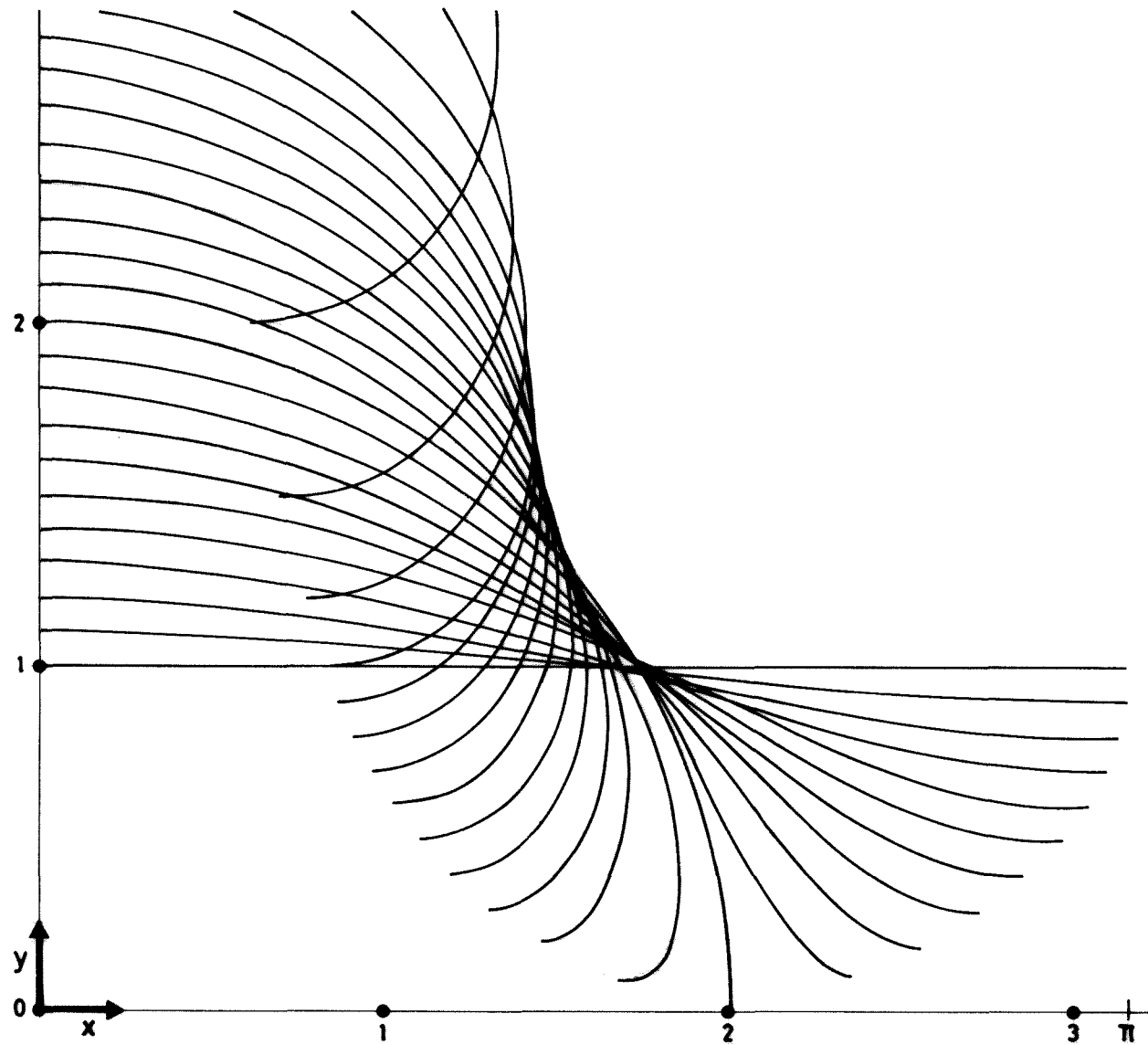


Fig. A-3.3. Formas normalizadas de equilibrio (referidas a la sección ventral).

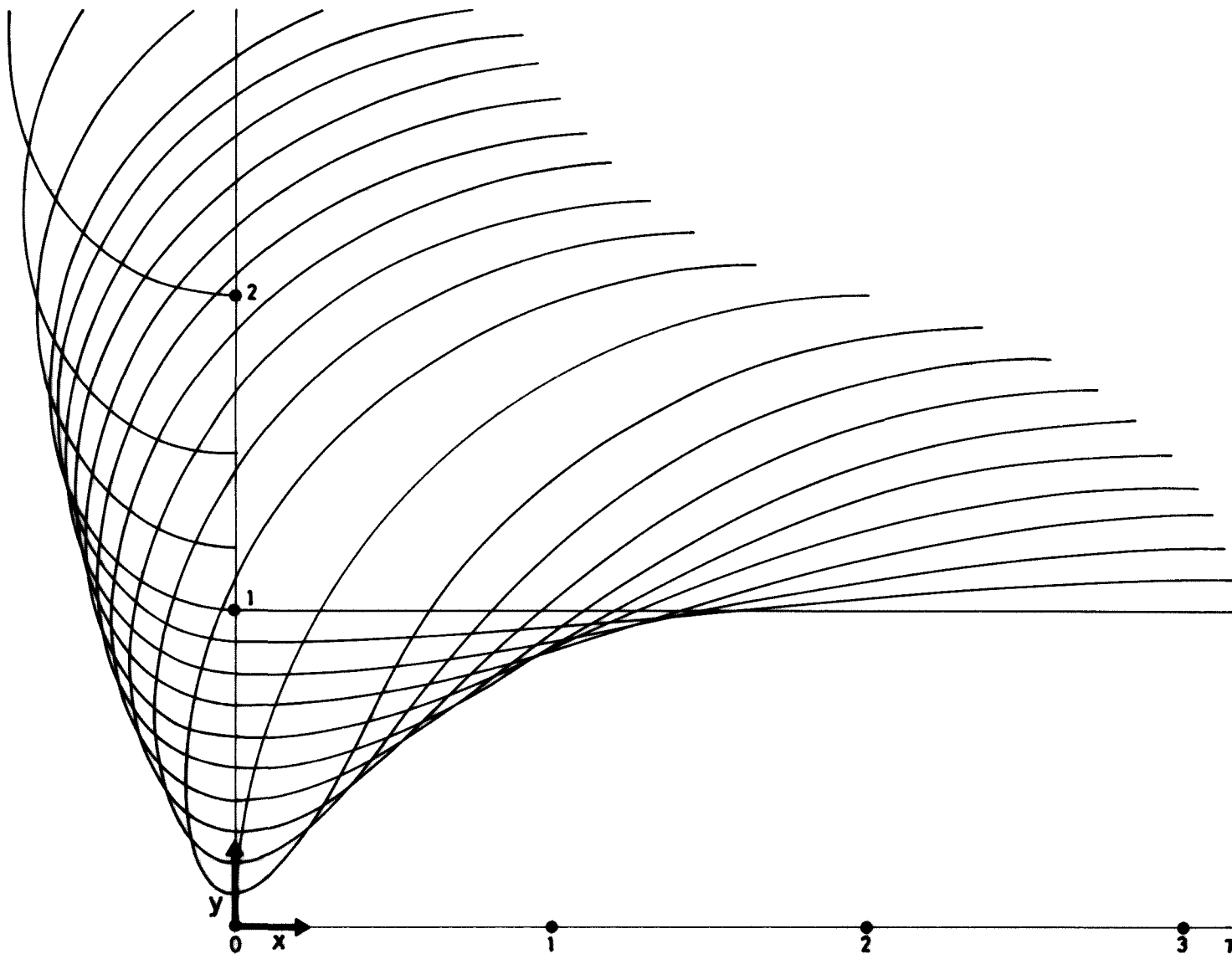


Fig. A-3.4. Formas normalizadas de equilibrio (referidas a la sección nodal).

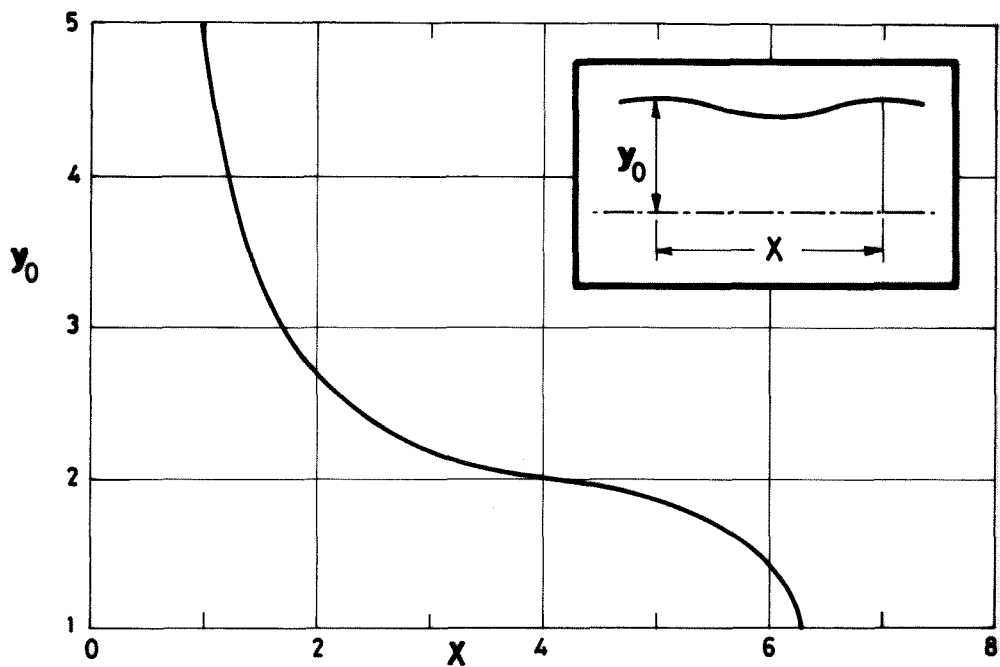


Fig. A-3.5. Relación entre el valor máximo, y_0 , y el período, X , de las formas de equilibrio normalizadas.

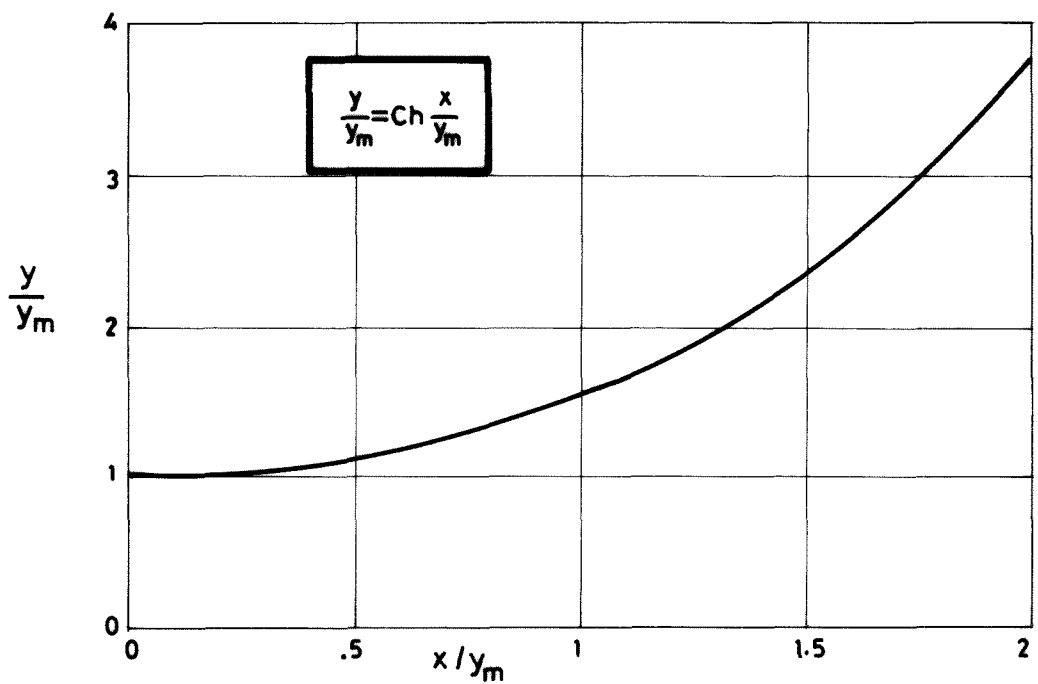


Fig. A-3.6. Forma normalizada de equilibrio en el caso $p=0$.

CAPITULO 4

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD AXILSIMETRICA Y NO AXILSIMETRICA DE
LAS FORMAS CILINDRICAS DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLO-
TANTE SIN ROTACION Y CON ROTACION GLOBAL

Indice

- Lista de símbolos
- 4.1. ZONAS CILINDRICAS
- 4.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO
- 4.3. RESOLUCION
- 4.4. ANALISIS DEL RESULTADO
 - 4.4.1. Caso de zona con los bordes anclados
 - 4.4.2. Caso de zona con los bordes libres
 - 4.4.3. Caso mixto de zona con un borde anclado y el
otro libre

LISTA DE SIMBOLOS

- A , Coeficiente constante en la ecuación (2).
- L , Longitud de la zona. Lagrangiana por unidad de volumen.
- R , Radio de la zona cilíndrica.
- U , Energía potencial superficial de la zona, adimensionalizada con σL^2 .
- V , Volumen de la zona, adimensionalizado con L^3 .
- W , Energía interna de presión, adimensionalizada con σL^2 .
- a , Radio de la zona cilíndrica, adimensionalizado con L.
- e , Coeficientes de ponderación por condiciones en los límites.
- m , Modo transversal ($m = 1, 2, 3, \dots$).
- n , Modo longitudinal ($n = 1, 2, 3, \dots$).
- p , Diferencia de presiones entre el eje de la zona y la atmósfera externa, adimensionalizada en la forma:

$$p = \frac{P_o - P_a}{\sigma} L .$$

- r , Coordenada radial, adimensionalizada con L.
- z , Coordenada axial, adimensionalizada con L.
- Ω , Velocidad angular.
- ϵ , Parámetro del desarrollo lineal del problema ($\epsilon \ll 1$).
- η , Deformación respecto al cilindro, adimensionalizada con R.
- ρ , Densidad del líquido.
- σ , Coeficiente de tensión superficial líquido-gas.
- φ , Angulo azimutal.
- ω , Parámetro de rotación: $\omega = \frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma} .$

Subíndices

m , Modo transversal.

n , Modo longitudinal.

z , Derivación parcial respecto a la variable z.

φ , Derivación parcial respecto a la variable φ .

4. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD AXILSIMETRICA Y NO AXILSIMETRICA DE LAS FORMAS CILINDRICAS DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLO-TANTE SIN ROTACION Y CON ROTACION GLOBAL.

4.1. ZONAS CILINDRICAS

Una zona líquida cilíndrica puede presentarse en los tres casos simples siguientes (ver Fig. 4.1):

a) Cuando el ángulo de contacto líquido-sólido-gas es de 90° . En este caso, para cualquier volumen, la zona será cilíndrica si el líquido no alcanza el borde. No importa si los discos son desiguales.

b) Cuando el ángulo de contacto es menor de 90° , (líquido que moja), existe un volumen de líquido para el cual, con ambos discos iguales, se formará una zona cilíndrica.

c) Para ángulos de contacto mayores de 90° , (líquido que no moja), es necesario que los discos tengan reborde (ver Fig. 4.1.c) para que pueda existir zona cilíndrica, la cual sólo lo será para un volumen apropiado.

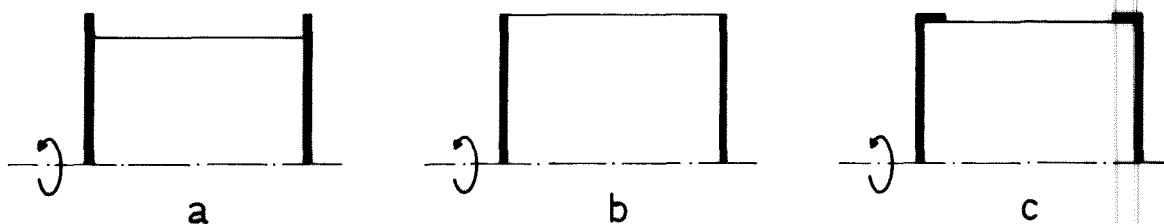


Fig. 4.1. Casos simples de zona cilíndrica.

Puede darse, claro está, algún caso combinado de los an

teriores.

El limitarnos exclusivamente al estudio de la estabilidad de zonas cilíndricas de revolución es debido a que su estudio es el más sencillo, y puede ayudarnos en la comprensión de casos más complicados cuyo estudio teórico requeriría un esfuerzo tal vez no compensado. Por ejemplo, en el caso de zonas líquidas aisladas sin contacto con sólidos, ha sido estudiada la estabilidad axilsimétrica y no axilsimétrica de una masa líquida esférica por Poincaré [31], Chandrasekhar [10], Ross [36], Wang [45], etc..

Sabemos que una zona líquida cilíndrica de revolución, puede ser forma de equilibrio, en principio para cualquier velocidad de rotación. En general, ésta será la única solución de equilibrio; el planteamiento matemático del problema lo haremos más adelante. Pero, ¿será la solución, única, siempre?, o bien existirán conjuntos apropiados de valores de las variables que definen la zona (el radio a y el parámetro de giro ω) para los cuales aparezcan puntos de bifurcación; es decir, posibles soluciones distintas de la cilíndrica de revolución, pero que siendo de menor energía, saquen irreversiblemente al líquido de su forma primitiva, deformándose la superficie a partir de aquí, más y más hasta romperse la zona.

No vamos a entrar en el estudio de las nuevas formas de equilibrio (si existieran) que aparecerían al sobrepasar estos valores de bifurcación, sino que, por simple teoría linealizada, vamos a limitarnos a determinar la posición de los puntos de bifur-

cación en función de las variables independientes (esbeltez de la zona, y rotación) para los posibles modos de deformación.

4.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO

Sea una zona líquida casi cilíndrica tal como la representada en la Fig. 4.2.

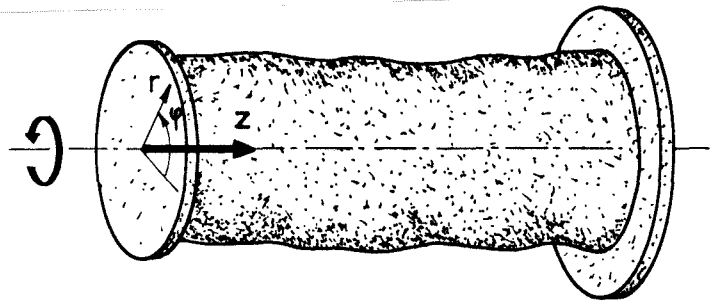


Fig. 4.2. Esquema de una zona casi cilíndrica.

Siendo, a , el radio de la zona cilíndrica no deformada, y tomando siempre longitudes adimensionalizadas con la longitud, podemos partir de la ecuación de la superficie deformada, en la forma:

$$r = a[1 + \varepsilon \eta(\varphi z)] \quad . \quad (1)$$

Desarrollada en serie de Fourier, será:

$$r = a \left[1 + \varepsilon \sum_{nm} A_{nm} \sin m \varphi \sin \left[\left(n + \frac{e_1}{2} \right) \pi z + e_2 \frac{\pi}{2} \right] \right] , \quad (2)$$

en donde, debido a las condiciones en los límites, deberá tomarse:

$$\left. \begin{array}{lll} e_1=0 & e_2=0 & \text{para bordes anclados} \\ e_1=0 & e_2=1 & \text{para bordes libres} \\ e_1=1 & e_2=0 \text{ ó } 1 & \text{para zona con un extremo} \\ & & \text{anclado y el otro libre.} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Por interesarnos solamente la aproximación lineal, podemos desacoplar las deformaciones, utilizando una, genérica:

$$r = a \left[1 + \varepsilon A \sin m\varphi \sin \left[\left(n + \frac{e_1}{2} \right) \pi z + e_2 \frac{\pi}{2} \right] \right] , \quad (4)$$

Es decir, hemos tomado en (1)

$$\eta = A \sin m\varphi \sin \left[\left(n + \frac{e_1}{2} \right) \pi z + e_2 \frac{\pi}{2} \right] . \quad (5)$$

Para la resolución del problema utilizaremos el método variacional, buscando una extremal de la Lagrangiana del sistema, construída restando a la energía potencial superficial, U , la energía interna de presiones, W , y conservando un cierto volumen, V . Es decir:

$$\int_V L dv = U - W = \text{extremal} \quad (6)$$

con

$$\int_V dv = V , \quad (7)$$

si bien esta última condición la impondremos eligiendo adecuadamente los modos n y m para cada caso de condiciones de contorno.

Bastará, por tanto, con imponer la condición:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_V L dv = \frac{dU}{d\varepsilon} - \frac{dW}{d\varepsilon} = 0 . \quad (8)$$

4.3. RESOLUCION

Operando siempre en variables adimensionales, para resolver la ecuación (8), efectuamos los cálculos en el modo siguiente:

$$U = \iint r \sqrt{1 + \frac{r_{\varphi}^2}{r^2} + r_z^2} d\varphi dz \approx \iint r \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\eta_{\varphi}^2}{2} + a^2 \frac{\eta_z^2}{2} \right) \right] d\varphi dz, \quad (9)$$

$$\frac{dU}{d\varepsilon} \approx \iint \left[a\eta + \varepsilon (a\eta_{\varphi}^2 + a^3 \eta_z^2) \right] d\varphi dz = \iint a\eta \left[1 - \varepsilon (\eta_{\varphi\varphi} + a^2 \eta_{zz}) \right] d\varphi dz \quad (10)$$

en donde el último paso se ha llevado a cabo integrando por partes entre los valores extremos de las variables φ y z .

$$\begin{aligned} W &= \iiint (p + \omega r^2) r dr d\varphi dz \approx \\ &\approx \iint \left[\frac{pa^2}{2} (1 + 2\varepsilon\eta + \varepsilon^2 \eta^2) + \frac{\omega a^4}{4} (1 + 4\varepsilon\eta + 6\varepsilon^2 \eta^2) \right] d\varphi dz, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{dW}{d\varepsilon} \approx \iint \left[pa^2 \eta + \omega a^4 \eta + \varepsilon (pa^2 \eta^2 + 3\omega a^4 \eta^2) \right] d\varphi dz. \quad (12)$$

Sustituyendo en la ecuación (8) obtenemos:

- términos de orden cero (condición de equilibrio del cilindro no deformado):

$$-\frac{1}{a} + \omega a^2 + p = 0; \quad (13)$$

- términos de primer orden (condición de equilibrio en deformaciones):

$$a^2 \frac{\eta_{zz}}{\eta} + \frac{\eta_{\varphi\varphi}}{\eta} + 2\omega a^3 + 1 = 0. \quad (14)$$

Sustituyendo en esta última ecuación la (5) y efectuando la derivación indicada, se obtiene finalmente:

$$a^2 \pi^2 \left(n + \frac{e_1}{2} \right)^2 + m^2 - 1 - 2\omega a^3 = 0 \quad . \quad (15)$$

Normalmente, interesa conocer la máxima longitud estable para unas ciertas condiciones, así que será conveniente despejarla. En variables dimensionales, la expresión buscada es:

$$L_{\max} = \left(n + \frac{e_1}{2} \right) \pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} - m^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (16)$$

4.4. ANALISIS DEL RESULTADO

La fórmula (16) que acabamos de despejar, engloba todas las anteriormente sugeridas, desde el conocido valor de Rayleigh [32]:

$$L_{\max} = 2\pi R \quad (17)$$

para un cilindro sin rotación (experimentada por Plateau [30], Mason [26], etc.), y a la obtenida por Gillis [12] para inestabilidades simétricas con rotación:

$$L_{\max} = 2\pi n R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad (18)$$

experimentada por Carruthers y col. [09].

Tiene en cuenta, además, la influencia de las condiciones en los límites sobre la estabilidad [25] (cuando los bordes de la zona no están anclados en el borde del disco sino que pueden deslizar, la fórmula anterior se amplía a

$$L_{\max} = \pi n R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (19)$$

y, para condiciones mixtas, a

$$L_{\max} \approx 1.5 \pi n R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

El hecho de que no se cumpla la condición de conservación de volumen en este caso es irrelevante, como se muestra en el Apéndice a este capítulo).

Por último, introduce también el efecto de las inestabilidades no axilsimétricas, que disminuyen la máxima longitud estable.

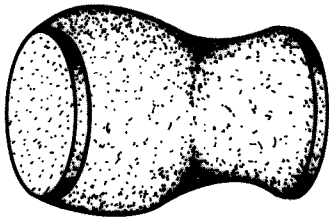
Para el cómputo de la ecuación (16) en cada caso de condiciones en los límites, habida cuenta de que la columna se deformará en la primera inestabilidad, tendremos (véase (3)):

4.4.1. Caso de zona con los bordes anclados

Modos

Axilsimétrico

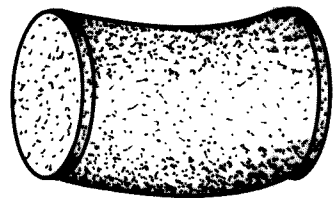
$n=2 \quad m=0$



(Forma en ánfora)

No axilsimétrico

$n=1 \quad m=1$



(Forma en comba)

Límite de estabilidad en longitud

$$L_{\max} = 2\pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad L_{\max} = \frac{\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}} \quad (21)$$

Aplicabilidad

$$\text{Para } \Omega \leq \sqrt{\frac{\sigma}{3\rho R^3}} \qquad \text{Para } \Omega \geq \sqrt{\frac{\sigma}{3\rho R^3}} \quad (22)$$

Límite de estabilidad en rotación

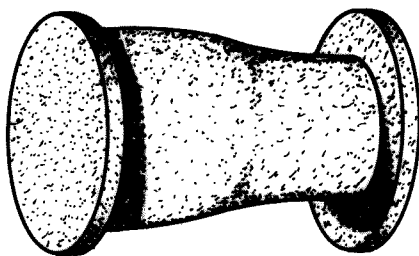
$$\Omega_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \left(4 \pi^2 \frac{R^2}{L^2} - 1 \right)} \qquad \Omega_{\max} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}} \quad (23)$$

Aplicabilidad

$$\text{Para } L \geq \sqrt{3}\pi R \qquad \text{Para } L \leq \sqrt{3}\pi R \quad (24)$$

4.4.2. Caso de zona con bordes libres

En este caso el primer modo crítico es siempre el axil-simétrico de $n=1$ y $m=0$



(Forma de botella)

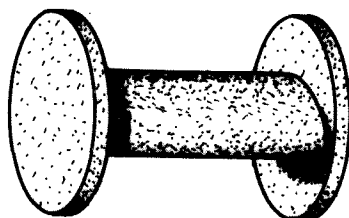
La máxima longitud estable es:

$$L_{\max} = \pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

y es aplicable para cualquier valor de la velocidad de giro tal que

$$\Omega \leq \sqrt{\frac{\sigma}{3\rho R^3}}, \quad (26)$$

ya que para ese valor la deformación sería no axilsimétrica de $n=0$ y $m=2$



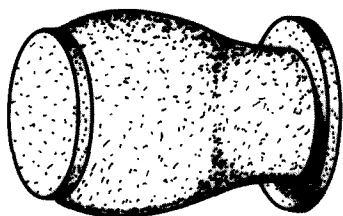
y a partir de ahí, esto es, para $\Omega \geq \sqrt{\frac{\sigma}{3\rho R^3}}$, no puede estar la zona líquida en equilibrio, independientemente de cual sea su longitud.

4.4.3. Caso mixto de zona con un borde anclado y el otro libre

Modos

Axilsimétrico*

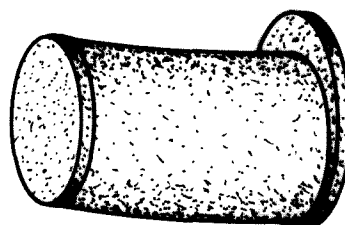
$n=1$ $e_1=0$ $m=0$



(Forma en ánfora)

No axilsimétrico

$n=0$ $e_1=1$ $m=1$



(Forma en semicomba)

Límite de estabilidad en longitud

$$L_{\max} \approx 1.5 \pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$L_{\max} = \frac{\pi}{2\Omega} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}} \quad (27)$$

* El análisis en este caso es tan solo aproximado. Un estudio más riguroso se encuentra en el Apéndice a este capítulo.

Aplicabilidad

$$\text{Para } \Omega \lesssim \sqrt{\frac{\sigma}{8\rho R^3}} \qquad \text{Para } \Omega \gtrsim \sqrt{\frac{\sigma}{8\rho R^3}} \quad (28)$$

Límite de estabilidad en rotación

$$\Omega_{\max} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \left[\left(1.5 \pi \frac{R}{L} \right)^2 - 1 \right]} \qquad \Omega_{\max} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}} \quad (29)$$

Aplicabilidad

$$L \gtrsim \sqrt{2} \pi R \qquad L \lesssim \sqrt{2} \pi R \quad (30)$$

Apéndice

al

CAPITULO 4

ESTUDIO DETALLADO DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA
CILINDRICA CON UN BORDE ANCLADO Y EL OTRO LIBRE

A-4. ESTUDIO DETALLADO DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA CILINDRICA
CON UN BORDE ANCLADO Y EL OTRO LIBRE.

La solución obtenida en el Capítulo 4, para el límite de estabilidad en este caso de condiciones de contorno mixtas, es solamente aproximada, pues no se cumplía la conservación de volumen de líquido en la zona. Es decir, la forma deformada supuesta, que para este caso puede reducirse a

$$r = a \left[1 + \epsilon \sum A_{mn} \sin m \varphi \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi z \right], \quad (1)$$

no debe cumplir condiciones en los límites homogéneas, y por tanto, no es lícito suponer que la deformación

$$\eta = \sum A_{mn} \sin m \varphi \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi z \quad (2)$$

puede descomponerse en términos desacoplados.

Con el fin de facilitar el desarrollo, y puesto que las deformaciones circunferenciales pueden desacoplarse de las longitudinales, vamos a considerar simplemente estas últimas, comparando los valores aproximados obtenidos en el capítulo anterior en que se tomó

$$\eta = A \sin \frac{3\pi}{2} z \quad (3)$$

con los valores que se obtienen usando el desarrollo completo:

$$\eta = \sum A_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi z \quad (4)$$

Las condiciones que debe cumplir (4) son:

$$\eta(0) = 0 \quad (5)$$

$$\eta_z(1) = 0 \quad (6)$$

$$\int_0^1 \eta dz = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n + \frac{1}{2}} = 0 \quad (7)$$

El primer modo corresponderá a

$$A_0 \neq 0 \quad A_1 = -3A_0 \quad A_n \Big|_{n>1} = 0 \quad (8)$$

Comparando esta solución "exacta"

$$\eta = A \left(\sin \frac{3\pi}{2} z - \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} z \right) \quad (9)$$

con la solución aproximada (3) utilizada en el capítulo anterior, podemos adelantar que la aproximación parece aceptable, y que el coeficiente 1.5 que entra en la expresión de la máxima longitud estable (ver (26), Capítulo 4), será algo menor, en realidad. Hagamos el cálculo exacto:

La deformación $\eta(z)$ deberá satisfacer la condición de contorno linealizada del equilibrio local en la superficie libre (véase, para más detalles, el desarrollo hecho en el Capítulo 5 hasta la ecuación (21)):

$$\eta_{zz} + \frac{1}{\alpha^2} \eta = \frac{C_1}{\alpha^2} \quad , \quad (10)$$

siendo

$$\alpha = a(1+2\omega a^3)^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

y C_1 una constante indeterminada, relacionada con la variación de la presión en el eje de la zona.

La solución general es:

$$\eta = C_1 + C_2 \cos \frac{z}{\alpha} + C_3 \sin \frac{z}{\alpha} \quad (12)$$

y las condiciones de contorno que debe cumplir son

$$\eta(0) = 0 \quad (13)$$

$$\eta_z(1) = 0 \quad (14)$$

$$\int_0^1 \eta dz = 0 \quad (15)$$

que nos proporcionan el determinante, Δ , a anular para obtener las soluciones no triviales:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} \sin \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \cos \frac{1}{\alpha} \\ 1 & \alpha \sin \frac{1}{\alpha} & \alpha(1 - \cos \frac{1}{\alpha}) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

La solución es

$$\frac{1}{\alpha} - \operatorname{tg} \frac{1}{\alpha} = 0 \implies \alpha = .223 \implies \frac{1}{\alpha} = 1.43 \pi \quad (17)$$

Este es, precisamente, el valor del coeficiente que aparece en la expresión de la máxima longitud estable, y que de un modo aproximado (1.5 frente 1.43) se obtuvo en el Capítulo 4 (ecuación (26)).

Por tanto, los valores exactos de los límites de estabilidad para el caso de zona con un borde anclado y el otro libre, serán:

Modo axilsimétrico

Modo no axilsimétrico

Límite de estabilidad en longitud

$$L_{\max} = 1.43 \pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad L_{\max} = \frac{\pi}{2\Omega} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}} \quad (18)$$

Aplicabilidad

$$\text{Para } \Omega \leq \sqrt{\frac{\sigma}{7.2 \rho R^3}} \quad \text{Para } \Omega \geq \sqrt{\frac{\sigma}{7.2 \rho R^3}} \quad (19)$$

Límite de estabilidad en rotación

$$\Omega_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \left[\left(1.43 \pi \frac{R}{L} \right)^2 - 1 \right]} \quad \Omega_{\max} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}} \quad (20)$$

Aplicabilidad

$$\text{Para } L \geq 1.33 \pi R \quad \text{Para } L \leq 1.33 \pi R \quad (21)$$

CAPITULO 5

PEQUEÑAS OSCILACIONES DEL VOLUMEN DE LIQUIDO EN LA ZONA

Indice

- Lista de símbolos
- 5.1. INTRODUCCION
- 5.2. PLANTEAMIENTO
- 5.3. RESOLUCION
 - 5.3.1. Zona cilíndrica
 - Zona con bordes anclados
 - Zona con bordes libres
 - Zona con un borde anclado y el otro libre
- 5.4. RESULTADOS
- 5.5. CONCLUSIONES

LISTA DE SIMBOLOS

- A, Constante, en la ecuación (21).
- B, Constante, en la ecuación (21).
- L, Longitud de la zona flotante, usada para adimensionalizar.
- P, Presión.
- Q, Intensidad máxima del manantial pulsante.
- R, Radio de una zona flotante cilíndrica.
- a, Radio de una zona cilíndrica. Adimensionalizado con L.
- b, Pulsación del manantial. (2π veces la frecuencia de su movimiento).
- c, Curvatura total de la superficie libre en un punto. Adimensionalizada con L^{-1} .
- p, Diferencia de presión desde el eje de la zona no perturbada a la atmósfera. Adimensionalizada en la forma,

$$p = \frac{P_0 - P_a}{\sigma} L$$

- q, Intensidad máxima del manantial pulsante. Adimensionalizada en la forma,

$$q = \frac{Q}{L^3} \sqrt{\frac{\rho L^3}{2\sigma}}$$

- t, Tiempo. Adimensionalizado con $\sqrt{\frac{\rho L^3}{2\sigma}}$

x, Coordenada longitudinal. Adimensionalizada con L.

y, Coordenada transversal. Adimensionalizada con L.

Ω , Velocidad angular de giro global de la zona.

α , Radio adimensional equivalente al de una zona cilíndrica sin rotación. Definido por la ecuación (20).

β , Pulsación del manantial. Adimensionalizada en la forma,

$$\beta = b \sqrt{\frac{\rho L^3}{2\sigma}}$$

ϵ , Parámetro adimensional de perturbación:

$$\epsilon = \frac{q \beta}{4 \pi} = \frac{\rho Q b}{8 \pi \sigma} \ll 1$$

ξ , Variable interna de integración en las ecuaciones (21), (23), y (25).

η , Coordenada trasversal de la superficie de la zona deformada. Adimensionalizada con L.

ρ , Densidad del líquido de la zona.

σ , Coeficiente de tensión superficial líquido-gas.

φ , Potencial de perturbación. Adimensionalizado con $\rho \frac{\sigma}{L} \sqrt{\frac{\rho L^3}{2\sigma}}$

ω , Parámetro de rotación global de la zona:

$$\omega = \frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma}$$

Subíndices

0, Relativo a magnitudes no perturbadas.

1, Relativo al primer término del desarrollo en serie de las magnitudes perturbadas.

C, Valor constante de referencia.

c, Valor constante de referencia respecto a la presión en el eje de la zona no perturbada $p_c = (p_c - p_o)/\epsilon$.

Superíndices

', Indica derivación respecto a la variable x.

5. PEQUEÑAS OSCILACIONES DEL VOLUMEN DE LIQUIDO EN LA ZONA.

5.1 INTRODUCCION.

Desde ambos puntos de vista, teórico y práctico, el método más sencillo de introducir una perturbación medible con objeto de analizar la estabilidad de una cierta configuración de equilibrio de una zona flotante, es, variar el volumen de líquido contenido entre las placas.

No es éste, sin embargo, el procedimiento más intuitivo de perturbación real, pues, pensando siempre en la aplicación de la zona flotante al crecimiento cristalino, la primera perturbación que nos aparece es la debida a la inevitable vibración de las varillas suministradora y receptora. No obstante, recuperando la idea más básica de zonas flotantes, y teniendo en cuenta que, al menos en el próximo futuro, todas las experiencias con zonas flotantes se realizarán inyectando axialmente el líquido en la zona [37], resulta obvio que el primer mando disponible será el de inyección axial de líquido.

En este análisis teórico supondremos que la inyección de líquido es puntual (manantial-sumidero centrado en uno de los discos), idealización no muy alejada de la realidad, en que se intenta minimizar el orificio de inyección con vistas a no dañar la capa de Ekman [14] que aparecerá en la dinámica interna de las zonas flotantes giratorias, y que ocasionaría formaciones hidrodinámicas cilíndricas, (columnas de Taylor-Proudman [44]).

5.2 PLANTEAMIENTO

La principal hipótesis simplificativa que vamos a introducir es la linealidad del proceso, que junto con las condiciones en el contorno no perturbado, nos permitan aplicar el principio de superposición. La validez de esta hipótesis se fundamenta en admitir que las oscilaciones de volumen son pequeñas; el orden de valores será determinado posteriormente.

Vamos a limitar el estudio a los casos en los que la frecuencia de la pulsación del gasto, b , sea mucho mayor que la frecuencia del movimiento de giro global de la zona, Ω ; es decir.

$$\frac{b}{\Omega} = \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \gg 1, \quad (1)$$

ta que existe un valor crítico $\frac{b}{\Omega} = 2$ [14] que separa la región en la que el problema es elíptico, $\frac{b}{\Omega} > 2$, de la que produce soluciones hiperbólicas, $\frac{b}{\Omega} \leq 2$, que da lugar a ondas y líneas características.

Sea una zona flotante, Fig.5.1 definida por su superficie libre, $\eta_0(x)$, girando como sólido rígido. Vamos a estudiar el efecto de superponer un manantial pulsante centrado en uno de los discos, de intensidad instantánea $q \sin \beta t$. Todas las magnitudes se han adimensionalizado según se indica en la Lista de Símbolos.

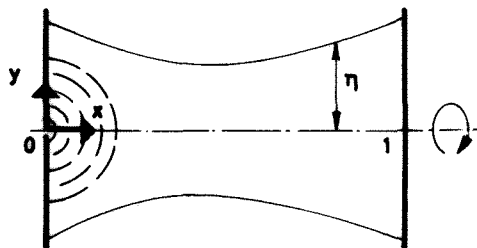


Fig. 5.1. Zona flotante con manantial pulsante.

La ecuación que determina la forma de la superficie libre de la zona no perturbada es la condición de equilibrio estático,

$$c_0 + \omega \eta_0^2 + p_0 = 0 \quad (2)$$

siendo c_0 la curvatura total de la superficie libre en un punto. Para una zona axilsimétrica,

$$\frac{\eta_0''}{(1+\eta_0'^2)^{3/2}} - \frac{1}{\eta_0 (1+\eta_0'^2)^{1/2}} + \omega \eta^2 + p = 0 \quad (3)$$

La presencia del manantial inducirá un movimiento del líquido, modificándose la superficie libre y las presiones; así mismo, del reposo en ejes giratorios, se pasará a un estado de movimiento que, hechas las hipótesis oportunas, será potencial, respondiendo a las ecuaciones siguientes:

$$\text{- de continuidad} \quad \Delta \varphi = 0 \quad (4)$$

$$\text{- de cantidad de movimiento} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (p - p_C) \quad (5)$$

$$\text{- de equilibrio local en la superficie} \quad c + \omega \eta^2 + p = 0 \quad (6)$$

siendo p_C una cierta presión de referencia, y φ el potencial de velocidades, $\vec{v} = \nabla \varphi$, que si el campo fluido fuese ilimitado, sería simplemente el de un manantial en el origen; esto es,

$$\varphi = \frac{-q \operatorname{sen} \beta t}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (7)$$

pero que, al no cumplir las condiciones de contorno de una zona líquida finita, vendrá modificado. Habiendo supuesto que el efec-

o del manantial es pequeño, podemos, en general, despreciar la distorsión respecto al potencial del campo ilimitado, y establecer la condición de linealización imponiendo que la variación del campo de presiones sea pequeña; esto es,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = - (p - p_c) = - \frac{q \beta \cos \beta t}{4 \pi \sqrt{x^2 + y^2}} = - \epsilon \frac{\cos \beta t}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (8)$$

on

$$\epsilon = \frac{q \beta}{4 \pi} \ll 1 \quad (9)$$

, en variables dimensionales,

$$\epsilon = \frac{\rho Q b}{8 \pi \sigma} \ll 1 \quad (10)$$

Desarrollando el problema en potencias de ϵ y reteniendo sólo los términos lineales, podemos poner

$$\varphi = - \epsilon \frac{\sin \beta t}{\beta \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (11)$$

$$p_c = p_o + \epsilon p_c \quad (12)$$

$$\eta = \eta_o + \epsilon \eta_1 \quad (13)$$

$$c = c_o + \epsilon c_1 \quad (14)$$

con lo que las ecuaciones (5) y (6) pasan a ser, teniendo en cuenta (2) y (12),

$$\frac{\cos \beta t}{x^2 + y^2} = p_1 - p_c \quad (15)$$

$$c_1 + 2\omega \eta_o \eta_1 + p_1 \Big|_{y = \eta_o} = 0 \quad (16)$$

Ciñéndonos al caso de deformaciones axilsimétricas, podemos obtener c_1 a partir de la ecuación de equilibrio (la (3) para la η), introduciendo el desarrollo (13) e identificando con (14), lo que nos da,

$$c_1 = \frac{\eta_0''}{(1+\eta_0'^2)^{3/2}} \left(\frac{\eta_1''}{\eta_0''} - 3 \frac{\eta_0 \eta_1}{1+\eta_0'^2} \right) + \frac{1}{\eta_0(1+\eta_0'^2)^{1/2}} \left(\frac{\eta_1}{\eta_0} + \frac{\eta_0 \eta_1}{1+\eta_0'^2} \right) \quad (17)$$

sustituyendo en la ecuación (16) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden, en η_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_0''}{(1+\eta_0'^2)^{3/2}} \left(\frac{\eta_1''}{\eta_0''} - 3 \frac{\eta_0 \eta_1}{1+\eta_0'^2} \right) + \frac{1}{\eta_0(1+\eta_0'^2)^{1/2}} \left(\frac{\eta_1}{\eta_0} + \frac{\eta_0 \eta_1}{1+\eta_0'^2} \right) + \\ & + 2 \omega \eta_0 \eta_1 = - \frac{\cos \beta t}{\sqrt{x^2 + \eta_0^2}} - p_c \end{aligned} \quad (18)$$

que, junto a las condiciones de contorno apropiadas al caso concreto que se considere (bordes anclados, bordes libres a ángulo de contacto constante, o mixtas), nos dará la forma de variación del contorno con el tiempo, y, como casos críticos ($\eta_1 \rightarrow \infty$) los puntos de inestabilidad (autovalores del problema).

5.3 RESOLUCION

Incluso habiendo linealizado el problema (ecuaciones (11) a (14), la resolución de la ecuación (18) presenta la dificultad inherente a todo problema de equilibrio y estabilidad de zonas flotantes: salvo contadas excepciones, no es posible expresar la forma de la superficie de equilibrio mediante funciones

elementales. En vista de ello, y para tratar de obtener algún resultado, vamos a hacer aplicación al caso más sencillo: una zona cilíndrica.

6.3.1 Zona cilíndrica

La ecuación (18) aplicada al caso particular de zona flotante inicialmente cilíndrica, $\eta_0 = a$, se reduce a,

$$\eta_1'' + \left(\frac{1}{a^2} + 2\omega a \right) \eta_1 = - \frac{\cos \beta t}{\sqrt{x^2 + a^3}} - p_c \quad (19)$$

llamando

$$\alpha = a (1 + 2\omega a^3)^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

podemos poner la solución general de esta ecuación en la forma,

$$\eta_1 = A \cos \frac{x}{\alpha} + B \sin \frac{x}{\alpha} + \alpha \cos \beta t \int_0^x \frac{\sin \frac{x-\xi}{\alpha}}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} d\xi - \alpha^2 p_c \quad (21)$$

donde las constantes A, B, y p_c vienen determinadas por el volumen de líquido, y las condiciones en los límites. Tres casos distintos cabe considerar a este respecto:

- zona con bordes anclados = $\eta_1(0) = \eta_1(1) = 0$
- zona con bordes deslizantes = $\eta_1'(0) = \eta_1'(1) = 0$
- zona con un extremo anclado y otro deslizante = $\eta_1(0) = \eta_1'(1) = 0$

zona con bordes anclados.

En este caso, las condiciones que debemos imponer en los

límites son:

$$\eta_1(0) = 0 \quad \eta_1(1) = 0 \quad (22)$$

mientras que, para el volumen, la ecuación de conservación será,

$$\pi \int_0^1 \eta^2(tx) dx = \pi a^2 + \int_0^t q \sin \beta t dt \quad (23)$$

que con $\eta = a + \varepsilon \eta_1$ pasa a ser

$$\int_0^1 \eta_1(tx) dx = \frac{2}{a\beta^2} (1 - \cos \beta t) \quad (24)$$

Obsérvese que el valor medio temporal no es nulo, como fácilmente se intuye a la vista del gráfico en la Fig. 5.2.

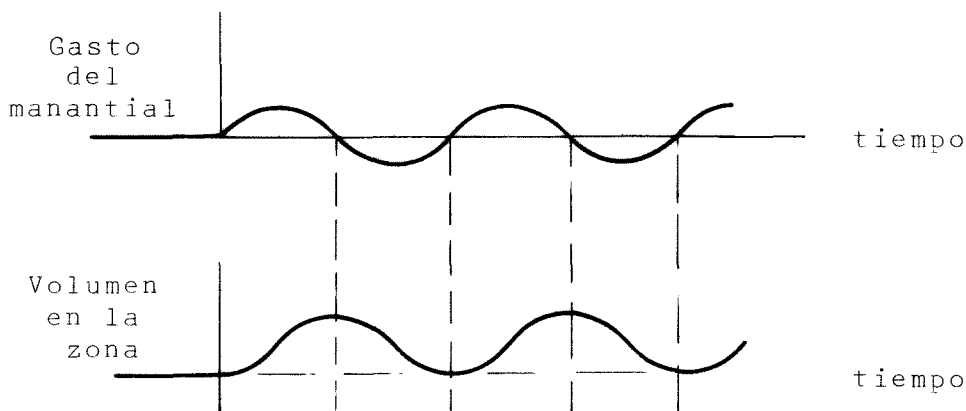


Fig. 5.2. Efecto del manantial sobre el volumen de líquido en la zona.

Introduciendo en la ecuación (21) las condiciones (22) y (23), obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, A , B , y p_c , aunque, debido a la identidad de estas ecuacio-

nes para cualquier valor del parámetro t , disponemos en realidad de más ecuaciones que incógnitas, como era de suponer ya que no es lícito exigir todas las condiciones a una ecuación obtenida linealizando (aproximación lineal).

Imponiendo solamente las condiciones en los límites y la conservación del volumen medio (dejando desacopladas las oscilaciones), llegamos a la solución siguiente:

$$\eta_1 = \alpha \operatorname{sen} \frac{x}{\alpha} \left[\alpha p_c \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2\alpha} - \operatorname{tg} \frac{x}{2\alpha} \right) - \cos \beta t \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{\alpha}} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \frac{1-\xi}{\alpha}}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} d\xi - \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{\alpha}} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} \frac{x-\xi}{\alpha}}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} d\xi \right) \right] \quad (25)$$

en donde p_c viene dado por

$$p_c = \frac{1}{a\beta^2\alpha^3} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \right)^{-1} \quad (26)$$

En la ecuación (25) se comprueba sin dificultad el cumplimiento de las condiciones de contorno en las placas.

Placa con bordes libres.

En este otro caso, las condiciones que debemos imponer en los límites son:

$$\eta_1'(0) = 0 \quad \eta_1'(1) = 0 \quad (27)$$

mientras que la conservación del volumen será la misma que antes:

$$\int_0^1 \eta_1 dx = \frac{2}{a\beta^2} (1 - \cos \beta t) \quad (28)$$

Introduciendo estas condiciones en la ecuación (21) llegamos a un sistema de ecuaciones similar al caso anterior, y, siguiendo el mismo razonamiento, llegamos a que la solución en este caso es,

$$\eta_1 = \frac{2}{a\beta^2} + \alpha \cos \beta t \left[\left(\frac{\cos \frac{x}{\alpha}}{\sin \frac{1}{\alpha}} - \alpha \right) \int_0^1 \frac{\sin \frac{1-\xi}{\alpha}}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} d\xi + \int_0^x \frac{\sin \frac{x-\xi}{\alpha}}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} d\xi \right] \quad (29)$$

Zona con un borde anclado y el otro libre.

Paralelamente, se impondrían ahora las condiciones en los límites

$$\eta_1(0) = 0 \qquad \eta_1'(1) = 0 \quad (30)$$

o bien

$$\eta_1'(0) = 0 \qquad \eta_1(1) = 0 \quad (31)$$

según se considerase el manantial en el disco a cuyo borde llega el líquido, o en el otro, respectivamente.

5.4 RESULTADOS.

Con el fin de comprobar los límites de estabilidad, y ganar conocimiento sobre las figuras deformadas, se ha procedido a un tanteo numérico de las soluciones con ordenador, del que se pueden sacar las siguientes conclusiones:

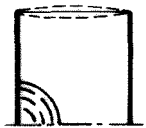
5.5 CONCLUSIONES.

La forma de la superficie libre de una zona flotante inicialmente cilíndrica, sobre la que actúa un manantial de gasto

pulsante centrado en uno de los discos soporte, se comporta del modo siguiente:

a) Para valores del radio equivalente, α , mucho mayores que el valor crítico de estabilidad (mayores del doble de éste), la zona es tan corta que la deformación se reduce a un simple hincharse y vaciarse acompasados con el manantial, como se aprecia en la Fig. 5.3.

Bordes
anclados



para
 $L < \pi R$

Bordes
libres



para
 $L < \frac{\pi}{2} R$

Un borde anclado
y el otro libre



para
 $L < .7 \pi$

Fig. 5.3. Deformación de una zona cilíndrica corta.

b) Para valores de α próximos a $\alpha = \frac{1}{\pi}$ no son válidas las ecuaciones, ya que en su deducción se dividió por $\sin \frac{1}{\alpha}$ al des-
pejar las constantes.

c) Para valores de α mayores que el valor crítico, pero me-
nores que el doble de éste, la zona es tan larga (esbelta), que
el movimiento del líquido en sus extremos va desfasado medio pe-
riodo, tomando la apariencia de un volumen peristáltico rítmica-
mente acompasado con las oscilaciones del manantial, como se es-
quematiza en la Fig. 5.4.

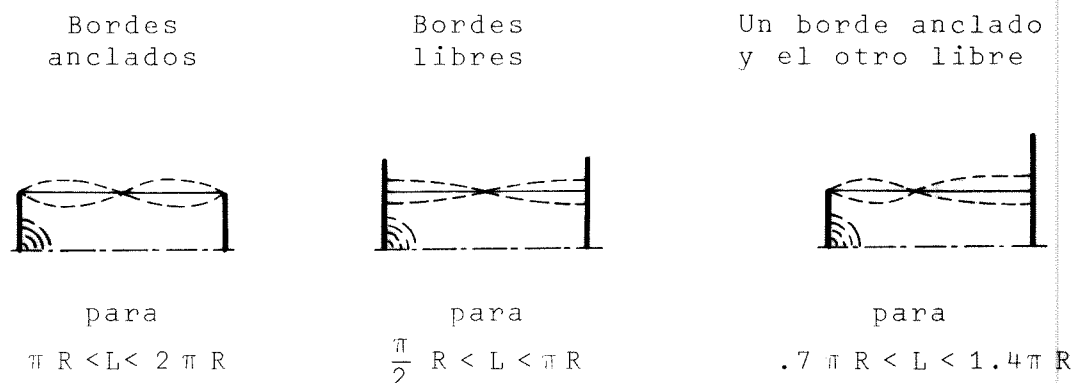


Fig. 5.4. Deformación de una zona cilíndrica larga.

d) Al aproximarnos a los valores críticos, la amplitud de la deformación crece indefinidamente, corroborando la existencia de una inestabilidad. Estos valores críticos son los ya conocidos [25].

$L_{\max} = 2\pi R$	para una zona cilíndrica con bordes anclados,
$L_{\max} = 1.4\pi R$	para una zona cilíndrica con un extremo anclado y el otro libre, y
$L_{\max} = \pi R$	para una zona cilíndrica con ambos bordes libres de deslizar.

e) Para el caso de un extremo anclado y el otro libre, existen dos configuraciones distintas: que el manantial esté en el extremo anclado, o que esté en el libre. Aunque cualitativamente no hay ninguna diferencia, sí la hay en cuanto a la distribución de amplitudes en la deformada.

CAPITULO 6

VIBRACION AXIAL DE UNA ZONA FLOTANTE CILINDRICA

Indice

- Lista de símbolos
- 6.1. INTRODUCCION
- 6.2. PLANTEAMIENTO
- 6.3. RESOLUCION
- 6.4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

LISTA DE SIMBOLOS

- A, Coeficiente en el desarrollo en series del potencial.
Ecuación (13).
- B, Coeficiente en el desarrollo en serie de la ecuación (18).
- L, Longitud de la zona flotante. Usada para adimensionalizar.
- P, Presión.
- R, Radio de una zona flotante cilíndrica.
- R, Función de la variable r introducida en (13) para el desarrollo del potencial.
- U, Potencial de fuerzas aplicadas. Adimensionalizado con σL^2 .
- a, Radio de una zona cilíndrica. Adimensionalizado con L.
- b, Pulsación de la vibración (2π veces la frecuencia de la oscilación).
- c, Curvatura total de la superficie libre en un punto. Adimensionalizada con L^{-1} .
- d, Amplitud de la oscilación.
- p, Diferencia de presión respecto a la atmosférica. Adimensionalizada con σL^{-1} .
- r, Coordenada radial. Adimensionalizada con L.
- t, Tiempo. Adimensionalizado con $\sqrt{\frac{\rho L^3}{2\sigma}}$.
- z, Coordenada axial. Adimensionalizada con L.
- β , Pulsación de la vibración. Adimensionalizada en la forma

$$\beta = b \sqrt{\frac{\rho L^3}{2\sigma}} .$$

δ , Amplitud de la oscilación. Adimensionalizada con L.

ϵ , Parámetro adimensional de perturbación:

$$\epsilon = \delta \beta^2 = \frac{\rho L^2}{2\sigma} db^2 \ll 1 .$$

η , Deformación de la superficie libre respecto al cilindro.
Adimensionalizada con $\epsilon^{-1}L$.

ρ , Densidad del líquido de la zona.

σ , Coeficiente de tensión superficial líquido-gas.

φ , Potencial de perturbación. Adimensionalizado con $\rho \frac{\sigma \sqrt{\rho L^3}}{L} \frac{2\sigma}{2\sigma}$.

ω , Parámetro de rotación global de la zona:

$$\omega = \frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma} .$$

Subíndices

0, Relativo a magnitudes no perturbadas.

1, Relativo al primer término de perturbación.

C, Valor constante de referencia.

c, Valor constante de referencia respecto a la presión en
el eje de la zona no perturbada; $p_c = (P_C - P_O)/\epsilon$.

cr, Valor crítico.

n, Orden del término en el desarrollo en serie (13).

r, Derivación respecto a r.

t, Derivación respecto a t.

z, Derivación respecto a z.

6. VIBRACION AXIAL DE UNA ZONA FLOTANTE CILINDRICA.

6.1 INTRODUCCION.

Independientemente de las posibles ventajas e inconvenientes que pueda presentar la realización controlada de ensayos a este respecto, la vibración axial del conjunto placas soporte-columna líquida es uno de los capítulos obligados en el estudio de la estabilidad de las zonas flotantes.

En la obtención y manejo de zonas flotantes en laboratorios orbitales multidisciplinarios con personal y equipo móvil a bordo, resulta obvio que cualquier experiencia ha de estar sometida a un ambiente de ruido mecánico inevitable. Amortiguamientos apropiados en las uniones estructurales contribuirán a paliar este defecto, pero incluso el más leve nivel de vibración puede ser de sastroso si se tiene en cuenta la delicada estabilidad de las zonas flotantes.

Es necesario, por tanto, hacer un detallado estudio de la influencia de las vibraciones sobre la zona flotante. Haremos aquí un análisis de la estabilidad, frente a oscilaciones según el eje de una zona inicialmente cilíndrica.

6.2 PLANTEAMIENTO.

Sea una zona flotante cilíndrica, en rotación como sólido rígido, montada sobre un bastidor que le hace vibrar axialmente. La inercia del líquido da lugar a una distribución de presiones según el eje, lo que desequilibra el salto de presión en la

superficie libre, apareciendo un movimiento trasversal del líquido hasta que la curvatura de la superficie contrarresta el desequilibrio de presiones. La variación con el tiempo de la aceleración, obliga a un movimiento acompasado del líquido siguiendo el proceso anterior, llegándose a un régimen estacionario en el que el tiempo sólo influye como parámetro.

Como hipótesis fundamental, establecemos la linealidad del problema, obteniendo los límites de validez durante el desarrollo del análisis. Con esto, supondremos que la deformación de la superficie libre será pequeña. En la Fig.6.1 se da un esquema de la zona.

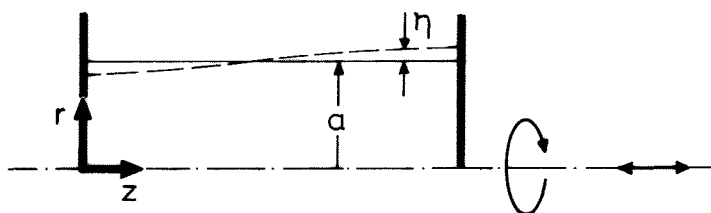


Fig. 6.1. Esquema de una zona inicialmente cilíndrica girando como sólido rígido, y sometida a vibraciones axiales.

Vamos a someter la zona a una vibración armónica pura de frecuencia β y amplitud de oscilación δ , ambas adimensionalizadas convenientemente; (ver Lista de Simbolos). La aceleración inercial que introduce en el sistema de referencia ligado a los discos soportes será $-\delta\beta^2\sin\beta t$, según la dirección axial, z .

Al no haber ninguna irregularidad azimutal, supondremos en todo el problema que existe simetría de revolución.

Despreciando efectos viscosos, y puesto que las fuerzas másicas derivan de una función potencial, U , podemos considerar que existe un potencial de velocidades, φ , que ha de cumplir las ecuaciones siguientes:

$$\text{Continuidad} \quad \Delta \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\text{Cantidad de movimiento} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(p - p_C) \quad (2)$$

Condiciones de contorno

$$\begin{array}{l} \text{- en las placas} \end{array} \quad \begin{array}{l} \varphi_z \Big|_{z=0} = 0 \\ \varphi_z \Big|_{z=1} = 0 \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \text{- en el eje} \end{array} \quad \varphi_r \Big|_{r=0} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} \text{- en la superficie libre} \end{array} \quad \varphi_r \Big|_{r=a} = \varepsilon \eta_t \quad (5)$$

En la superficie libre debe verificarse así mismo la condición de equilibrio local de presiones, el cual, desarrollado para pequeñas deformaciones

$$r = a + \varepsilon \eta \quad (6)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 \quad (7)$$

$$c = \frac{-1}{a} + \varepsilon \left(\eta_{zz} + \frac{1}{a^2} \eta \right) \quad (8)$$

$$U = \omega a^2 + \varepsilon \left(2 \omega a \eta - \frac{\delta \beta^2 z}{\varepsilon} \sin \beta t \right) \quad (9)$$

se reduce a

$$\eta_{zz} + \frac{1}{a^2} \eta + 2 \omega a \eta - \frac{\delta \beta^2 z}{\varepsilon} \sin \beta t + p_1 \Big|_{r=a} = 0 \quad (10)$$

Aquí vemos que la condición de linealización es que se cumpla

$$\delta\beta^2 \ll 1 \quad (11)$$

con lo que tomaremos como parámetro del desarrollo, ese valor; es decir,

$$\varepsilon = \delta\beta^2 = \frac{\rho L^2}{2\sigma} db^2 \ll 1 \quad (12)$$

6.3 RESOLUCION.

En vista de las condiciones (3), el potencial será, en su dependencia axial, de la forma $\cos\pi n z$, y por la condición (2), su dependencia temporal será del tipo $\cos\beta t$, lo que nos da pie para ensayar un desarrollo general en la forma

$$\varphi = \varepsilon \sum A_n \cos\pi n z \cos\beta t R(r) \quad (13)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) obtenemos para la $R(r)$ la ecuación diferencial de tipo Bessel

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \pi^2 n^2 R = 0 \quad (14)$$

que, puesto que R no puede ser infinito en el eje por la condición (4), nos da como solución

$$R = I_0(\pi n r) \quad (15)$$

Por la ecuación de compatibilidad (5), obtenemos como expresión de la deformación de la superficie,

$$\eta = \sum \frac{\pi n}{\beta} A_n \cos\pi n z \sin\beta t I_1(\pi n a) \quad (16)$$

donde se ha usado la igualdad $I_0' = I_1$.

Sustituyendo (16) en (10) y con ayuda de la ecuación (2), podemos poner (con $p_c = p_0 + \varepsilon p_c$),

$$\sum \left[-\frac{\pi n}{\beta} \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{a^2} - 2\omega a \right) I_1(\pi n a) + \beta I_0(\pi n a) \right] A_n \cos\pi n z \sin\beta t - z \sin\beta t + p_c = 0 \quad (17)$$

lo que nos indica el camino a seguir: desarrollar z en serie de cosenos,

$$z = \frac{1}{2} - \sum B_n \cos \pi n z \quad \text{con} \quad \begin{cases} B_n = \frac{4}{\pi 2n^2} & \text{para } n \text{ impar} \\ B_n = 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (18)$$

de donde se deduce que $p_c = \frac{1}{2} \sin \beta t$ e, igualando término a término en el desarrollo,

$$A_n = \frac{\frac{4\beta}{\pi^2 n^2 I_0(\pi na)}}{\pi n \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{a^2} - 2\omega a \right) \frac{I_1(\pi na)}{I_0(\pi na)}} \quad \text{para } n \text{ impar, } \forall \beta \quad (19)$$

$$A_n \quad \text{indeterminado} \quad \text{para } n \text{ par, } \beta = \beta_{cr} \quad (20)$$

$$A_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par, } \beta \neq \beta_{cr} \quad (21)$$

En cualquier caso, las frecuencias de resonancia, β_{cr} , vienen dadas por la expresión

$$\beta_{cr} = \sqrt{\pi n \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{a^2} - 2\omega a \right) \frac{I_1(\pi na)}{I_0(\pi na)}} \quad (22)$$

Si suponemos que a partir de este valor la columna líquida se ha roto, lo habrá hecho en el primer modo propio, $n=1$ (para el caso de bordes libres), resultando así un límite de estabilidad a vibración axial, que, para $\omega=0$, se ha representado en la Fig. 6.2 junto con las curvas de nivel ($A = \text{cte}$), supuesto que $A_n \ll A_1$ para $n > 1$.

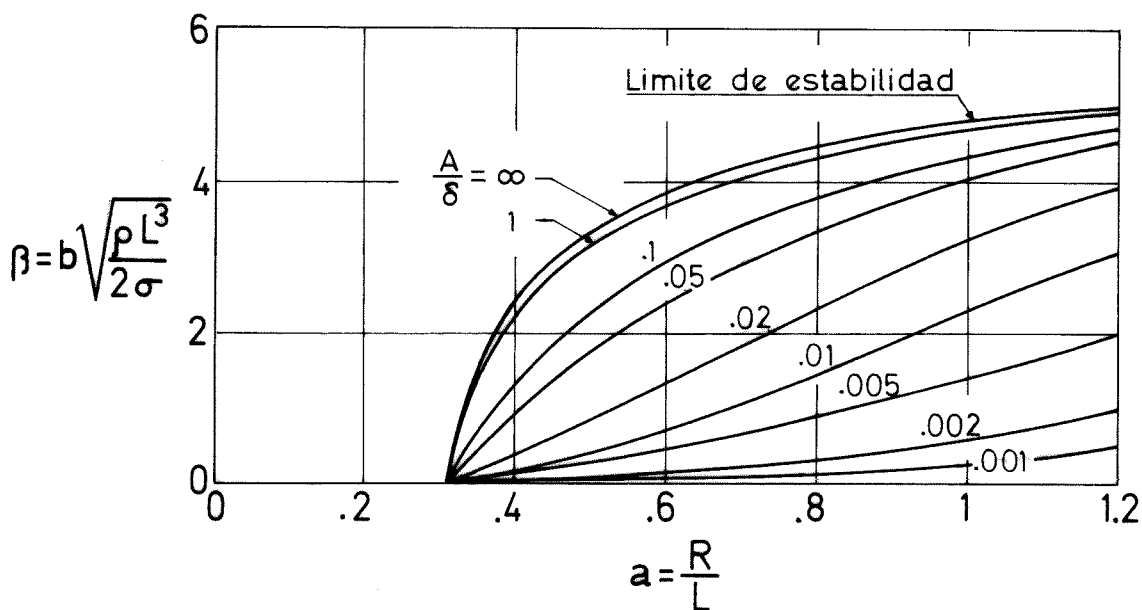


Fig. 6.2. Límite de estabilidad y amplitud de la deformación respecto al cilindro inicial, de una zona flotante sometida a vibración axial, en función del radio de la zona y de la frecuencia de la vibración, para $\omega = 0$; (para $\omega \neq 0$ aplíquense fórmulas (19) y (22)). Zona con bordes libres.

6.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

De la forma de la superficie deformada, dada por la ecuación (16), se obtienen los valores siguientes:

$$\eta_z \Big|_{z=0} = 0 \qquad \eta_z \Big|_{z=1} = 0 \qquad (23)$$

$$\eta \Big|_{z=0} = - \eta \Big|_{z=1} \neq 0 \qquad (\text{para } \beta \neq \beta_{cr}) \qquad (24)$$

de donde se deduce que todo el análisis hecho es válido formalmente sólo en el caso de bordes libres, el cual se expresa con

las condiciones (23), y para el cual es completamente válida la

Para el caso de bordes anclados, o uno anclado y otro libre, no es válido este análisis. Sin embargo, en vista de la Fig.6.2 y teniendo en cuenta que sabemos que para $\beta = 0$ los límites de estabilidad de zonas cilíndricas son

$$\begin{aligned} L_{\max} &= 2\pi R && \text{para bordes anclados} \\ L_{\max} &= 1,4\pi R && \text{para un borde anclado y otro libre} \\ L_{\max} &= \pi R && \text{para bordes libres} \end{aligned} \quad (25)$$

es posible la suposición de que el comportamiento será análogo, y que los límites de estabilidad en vibración axial sean los representados en la Fig. 6.3.

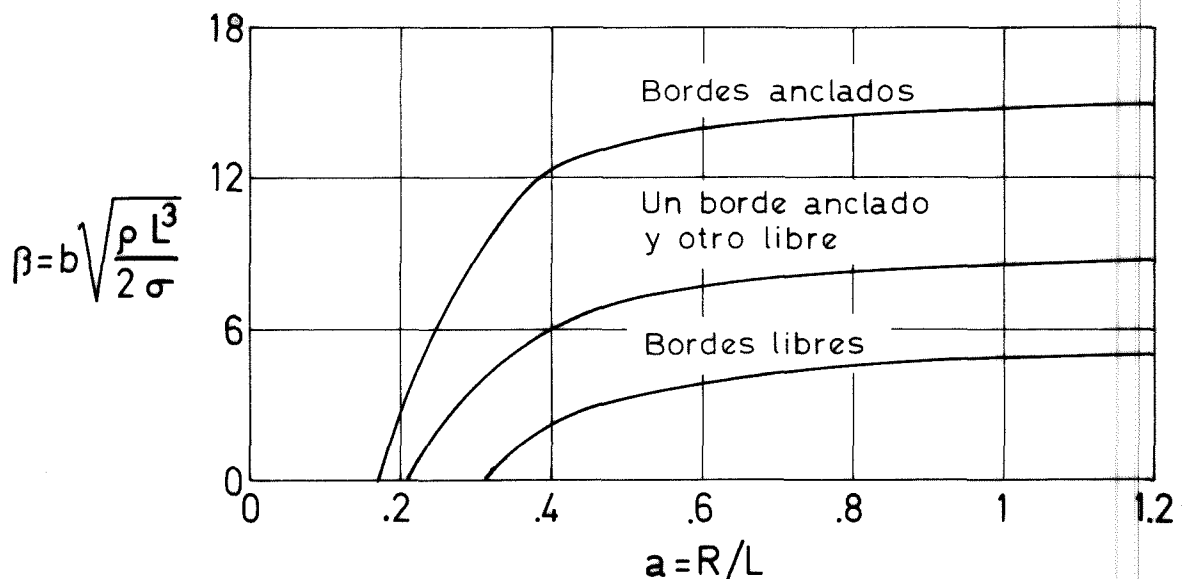


Fig.6.3. Límites de estabilidad en vibración axial de zonas líquidas cilíndricas para $\omega = 0$; (para $\omega \neq 0$ puede utilizarse la fórmula (22)).

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA.

- | | | |
|--|------|--|
| 01.- Akhiezer, N.I. | 1962 | "The Calculus of Variations",
Blaisdell Publishing Company,
New York, 1962. |
| 02.- Appel, P. | 1932 | "Traité de Mécanique Rationnelle",
Vol. 4, Chap. IX, Gauthier-
Villars, Paris, 1932. |
| 03.- Baker, J.D. | 1966 | "A Technique for the Precise
Measurement of Small Fluid
Velocities",
J. Fluid Mech., Vol. 26, part 3,
pp. 573-575, Nov. 1966. |
| 04.- Batchelor, G.K. | 1951 | "Note on a Class of Solutions of
the Navier-Stokes Equations
Representing Steady Rotationally-
Symmetric Flow",
Quart. J. Mech. 4, pp. 29-41,
1951. |
| 05.- Beck, R.,
Gürs, K.,
Seger, G. | 1976 | "Observations, Estimated and
Suggested Experiments Relating
to Surface-Tension-Induced
Thermoconvection",
ESA SP-114, Sept. 1976. |
| 06.- Benz, K.W. | 1974 | "Single Crystals of Electronic
Materials Grown in Space
Environment",
ESRO SP-101, July 1974. |
| 07.- Calvert, R.T.,
Melcher, J.R. | 1969 | "Stability and Dynamics of Rota-
ting Dielectrophoretic Equilib-
ria",
J. Fluid Mech., Vol. 38, part 4,
pp. 721-742, Oct. 1969. |

- 08.- Carruthers, J.R., 1972 "Studies of Floating Liquid Zones
Grasso, M. in Simulated Zero Gravity",
J. Appl. Phys., Vol. 43, No. 2,
pp. 436-445, Feb. 1972.
- 09.- Garruthers, J.R., 1975 "Studies of Rotating Liquid
Gibson, E.G., Floating Zones on Skylab IV",
Klett, M.G., AIAA Paper No. 75-692,
Facemire, B.R. AIAA 10th Thermophysics Confer-
ence, Denver, Colorado, May
27-29, 1975.
- 10.- Chandrasekhar, S. 1965 "The Stability of a Rotating
Liquid Drop",
Proc. Royal Society, London,
p. 286, 1965.
- 11.- Da Riva, I., 1976 "Fluid Physics Module Experi-
Ruesga, J.M. ments",
ESA SP-114, Sept. 1976.
- 12.- Gillis, J., 1972 "Stability of a Rotating Liquid
Suh, K.S. Column",
Phys. Fluids 5, pp. 1149-1155,
1962.
- 13.- Greenspan, H.P., 1963 "On a Time Dependent Motion of
Howard, L.N. a Rotating Fluid",
J. Fluid Mech. 17, pp. 385-404,
1963.
- 14.- Greenspan, H.P. 1968 "The Theory of Rotating Fluids",
Cambridge at the University
Press, Chap. I, pp. 1-8: Chap.II,
pp. 28-38, 1968.

- 15.- Heywang, W. 1956 "Zur Stabilität Senkrechter Schmelzzonen",
Z. Naturforschung 11a, pp.238-243,
1956.
- 16.- Inglis, D.R. 1975 "The Two-dimensionality of Slow
Motion in a Rotating Fluid",
Rev. Mod. Phys., Vol. 47, No. 4,
pp. 841-847, Oct. 1975.
- 17.- Kàrmàn, Th.v. 1921 "Über Laminare und Turbulente
Reibung",
Z. angew. Math. Mech. I,
pp. 233-251, 1921.
- 18.- Lamb, H. 1932 "Hydrodynamics",
Reproduction of the 6th (1932)
edition, Dover Publications, Inc.,
New York, Chap. IX, pp. 456-458,
1945.
- 19.- Landau, L.D., 1956 "Fluid Mechanics",
Lifshitz, E.M. Pergamon Press, Oxford, 1956.
- 20.- Levich, V.G. 1962 "Physicochemical Hydrodynamics",
Prentice-Hall, Inc., Englewood
Cliffs, N.J., Chap. XI, pp. 591-
668, 1962.
- 21.- Lewis, G. 1974 "Apparatus, Techniques and Physical
Parameters of Sounding-Rocket
Flights",
ESRO SP-101, July 1974.
- 22.- Lewis, G., 1976 "Floating Zone Electrophoresis in
Foster, P., Space",
White, B. Second European Symposium on
Material Sciences in Space,
Frascati 6-8 April, 1976.

- 23.- Lewis, G. 1976 "Preliminary Study of a General-Purpose Floating-Zone Electrophoresis Facility for Spacelab", ESA SP-114, Sep. 1976.
- 24.- Lichtenstein, I. 1933 "Gleichgewichtsfiguren Rotierender Flüssigkeiten", Springer Verlag, Berlin, 1933.
- 25.- Martínez Herranz, I. 1976 "Floating Zone under Reduced Gravity. Axisymmetric Equilibrium Shapes", Second European Symposium on Material Sciences in Space, Frascati 6-8 April, 1976.
- 26.- Mason, G. 1970 "An Experimental Determination of the Stable Length of Cylindrical Liquid Bubbles", J. Colloid Interface Sci., Vol. 32, pp. 172-176, 1970.
- 27.- Melcher, J.R., 1969 "Electrohydrodynamics: A Review of Taylor, G.I. the Role of Interfacial Shear Stresses", in Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 1, W.R. Sears and M. Van Dyke, Eds., Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, 1969, pp. 111-146.
- 28.- Ostrach, S. 1974 "Skylab Science Demonstrations", ESRO SP-101, July 1974.
- 29.- Pedley, T.J. 1967 "The Stability of Rotating Flows with a Cylindrical Free Surface", J. Fluid Mech., Vol. 30, part 1, pp. 127-147, 1967.

- 30.- Plateau, J. 1873 "Statique Experimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires", Vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1873.
- 31.- Poincaré, H. 1902 "Figures d'Equilibre d'une Masse Fluide", G. Carré, Paris, 1902.
- 32.- Rayleigh, Lord 1896 "The Theory of Sound", Vol. II, Reproduced of the 2nd (1896) edition, Dover Publications, Inc., New York, Chap. XX, pp. 351-355, 1945.
- 33.- Rayleigh, Lord 1914 "Equilibrium of Revolving Liquid under Capillary Forces", Phil. Mag. 28, p. 161, 1914.
- 34.- Reboux, J. 1974 "Use of Electromagnetic Fields for Positioning and Stirring Materials under Zero Gravity", ESRO SP-101, July 1974.
- 35.- Rogers, M.H., 1959 "The Rotationally Symmetric Flow of a Viscous Fluid in the Presence of an Infinite Rotating Disc", J. Fluid Mech. 7, pp. 617-613, 1959.
Lance, G.N.
- 36.- Ross, D.K. 1968 "The Shape and Energy of a Revolving Liquid Mass Held Together by Surface Tension", Aust. J. Phys. 21, pp. 823-835, 1968.

- 37.- Ruesga, J.M. 1976 "Fluid Physics Module",
CASA, under ESA contract
SC/95/HQ. CASA, Madrid, June
1976.
- 38.- Sedney, R., 1976 "Combined Techniques for Flow
Kitchens, W.,
Bush, C.C. Visualization",
AIAA Paper No. 76-55, AIAA 14th
Aerospace Sciences Meeting,
Washington, D.C., Jan. 26-28,
1976.
- 39.- Siegel, R. 1968 "Conformal Mapping for Steady Two-
dimensional Solidification on a
Cold Surface in Flowing Liquid",
NASA TN D-4771, Aug. 1968.
- 40.- Siekmann, J., 1975 "Über die Bewegung von Gasblasen
Dittrich, K. in einen Rotierenden Medium",
Ingenieur-Archiv 44, pp. 131-142,
Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- 41.- St. Maurice, J.P., 1975 "A Multi-Scaling Analysis of the
Veronis, G. Spin-up Problem",
J. Fluid Mech., Vol. 68, part 3,
pp. 417-445, 1975.
- 42.- Stewartson, K. 1952 "On the Flow Between Two Rotating
Coaxial Discs",
Proc. Cambridge Phil. Soc. 49,
pp. 333-341, 1952.
- 43.- Struik, D.J. 1966 "Geometría Diferencial Clásica",
Aguilar, S.A. de Editores,
Madrid, 1966.

- | | | |
|----------------------|------|--|
| 44.- Taylor, G.I. | 1923 | "Experiments on the Motion of Solid Bodies in Rotating Fluids", in G.I. Taylor Scientific Papers, Vol. 4, G.K. Batchelor Ed., Cambridge University Press, 1971, pp. 93-97. |
| 45.- Wang, T. | 1975 | "JPL Drop Dynamics Experiments", JPL Cal-Tech, Pasadena, 1975. |
| 46.- Wang, T. | 1976 | "Drop Dynamics in Space", ESA SP-114, Sept. 1976. |
| 47.- Wedemeyer, E.H. | 1964 | "The Unsteady Flow within a Spinning Cylinder", J. Fluid Mech., Vol. 20, part 3, pp. 383-399, Nov. 1964. |